

Energy, Congestion and Dilation in Radio Networks

Christian Föcker

12. Februar 2008

1 Einleitung

In der betrachteten wissenschaftlichen Arbeit Energy, Congestion and Dilation in Radio Networks [HSVG02] wird das Problem der Pfadauswahl in drahtlosen Netzwerken untersucht. Gegeben sind n Stationen im zweidimensionalen euklidischen Raum, die untereinander kommunizieren wollen. Es werden die Messgrößen Energy, Dilation und Congestion definiert, um die Qualität dieser Kommunikation zu beschreiben. Für diese Größen werden Methoden der Pfadauswahl vorgestellt, die jeweils eine dieser Größen so weit es geht minimiert (und damit optimiert). Für Energy und Dilation kann man optimale Pfade in polynomieller Zeit auswählen. Für die Größe Congestion wird eine Methode zur Pfadeselektion vorgestellt, die die optimale Congestion bis auf den Faktor $O(g(V)^2)$ approximiert. Dabei steht $g(V)$ für die Diversität der V Stationen des Netzwerks. Zudem stellt sich die Frage ob sich mehrere dieser Größen gleichzeitig optimieren lassen. Es wird gezeigt, dass dies nicht möglich ist. Dieses Ergebnis zeigt, dass es keine Methode der Pfadauswahl geben kann die alle Messgrößen optimiert und man diese daher aufeinander abstimmen muss.

2 Netzwerkmodell

Ein Kommunikationsnetzwerk N besteht aus n statischen Knoten, bezeichnet als Menge $V \subseteq \mathbb{R}^2$. Jeder dieser Knoten kann Pakete senden, empfangen oder weiterleiten. Ein Paket kann zu jedem anderen Knoten gesendet werden; dazu wird der Senderradius r angepasst (euklidische Distanz zwischen dem beiden kommunizierenden Knoten). Wenn zwischen zwei Knoten u, v Pakete ausgetauscht werden, dann enthält das Kommunikationsnetzwerk die Kante $e = (u, v)$ mit dem Radius r . Durch das Übertragen von Paketen ist in einem Gebiet, welches in diesem Modell als $D(e) = D_r(u) \cup D_r(v)$ angenommen wird, keine weitere Übertragung möglich. $D_r(u)$ bezeichnet dabei den Inhalt des Kreises mit Radius r um u . Eine andere Kante e' stört die Kante e , falls deren Störgebiet $D(e')$ einen der Knoten u oder v enthält. Die störenden Kanten von e werden nun durch $\text{Int}(e) := \{e' \in E(N) \mid e' \text{ stört } e\}$ definiert. Im Fall von Abb. 1 ist $\text{Int}(g) = \{f_1, f_3\}$.

Weiterhin wird der Störungsgraph $G_{Int}(N) = (V, E)$ definiert durch $V := \text{Kanten von } N$ und $E := \{(c, e) \mid c \in \text{Int}(e)\}$ (siehe Abb. 2). Der Eingangsgrad eines Knotens in $G_{Int}(N)$ wird als Störungszahl der entsprechenden Kante bezeichnet. Das Maximum der Störungszahlen über alle Kanten wird Störungszahl des Netzwerks genannt.

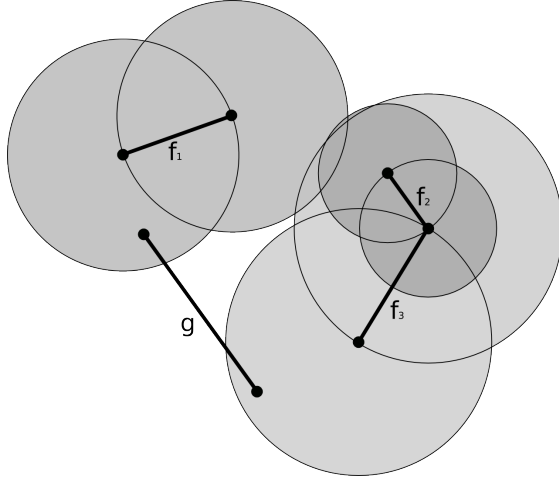


Abb. 1: Bestimmen von $\text{Int}(g)$

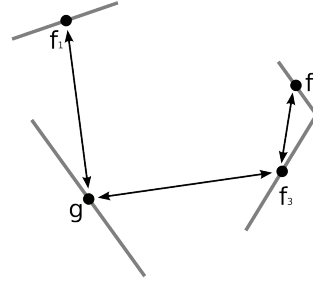


Abb. 2: Störungsgraph $G_{Int}(N)$

In dem Modell wird nun ein Routing-Problem $w : V \times V \rightarrow \mathbb{N}$ betrachtet. Es sollen $w(u, v)$ Pakete vom Knoten u zum Knoten v gesendet werden. Für jedes dieser Knotenpaare wird ein Pfad R_p gewählt (daraus ergibt sich das Pfadsystem P), über den die Pakete geroutet werden. Die Vereinigung der Kanten aller Pfade ist die Kantenmenge des Kommunikationsnetzwerks, E_P . Eine Routing Strategie beschreibt nun, wann ein Paket über welche Kante geschickt wird. Wird das Routingproblem in T Schritten gelöst, dann ist der Load einer Kante $l(e)$ die Anzahl der Schritte in denen ein Paket erfolgreich über e übertragen wird. Die Congestion von e wird durch $l(e) + \sum_{e' \in \text{Int}(e)} l(e')$ definiert. Die Congestion des Pfadsystems $C_P(V)$ ist das Maximum dieser Werte. Über den Load von Kanten wird zudem die Kapazität einer Region definiert. Dabei wird eine Region zunächst in elementare Regionen unterteilt. Eine Region ist elementar falls jeder Punkt des Gebiets von denselben Kanten E' gestört wird. Für eine elementare Region R' wird die Kapazität als $\kappa(R') := \sum_{e \in E'} l(e)A(R')$ definiert. Die Kapazität der gesamten Region R ist die Summe der Kapazitäten ihrer elementaren Regionen.

Die Dilation des Pfadsystems $D_P(V)$ wird definiert als die Länge des längsten Pfades in P und ist somit gleich der maximalen Anzahl an Knoten, über die ein Paket geroutet wird.

Für die Beschreibung der Größe Energy werden zwei Modelle eingeführt: Das Unit-Energy-Modell und das Flow-Energy-Modell. Das Unit-Energy-Modell gewichtet den Energieverbrauch jeder Kante des Kommunikationsnetzwerks gleich. Zudem wird der Energieverbrauch einer Kante als proportional zu $O(|e|^2)$ angenommen und ergibt sich so als $U\text{-Energy}_P(V) := \sum_{e \in E_P(N)} |e|^2$. Das Flow-Energy-Modell berücksichtigt zusätzlich den Load der Kanten und wird definiert als $F\text{-Energy}_P(V) := \sum_{e \in E_P(N)} l(e)|e|^2$.

3 Optimierung einer einzelnen Größe

3.1 Energy

Für das Unit-Energy-Model ist der minimale Spannbaum das optimale Pfadsystem eines drahtlosen Netzwerks, wobei das Kantengewicht mit $|e|^2$ neu definiert wird. Die Summe über die Kantengewichte unter der Bedingung dass jeder Knoten jeden anderen erreichen kann wird durch diesen Baum minimiert, daher ist auch die $U\text{-Energy}_P(V) := \sum_{e \in E_P(N)} |e|^2$ minimal.

Für das Flow-Energy-Model reicht der minimale Spannbaum nicht mehr aus, da auch der Load einer Kante mit gewichtet wird. Das optimale Pfadsystem erhält man, indem für jedes Knotenpaar ein kürzester Pfad Algorithmus auf dem vollständigen Graphen durchgeführt wird wobei jede Kante e das Gewicht e^2 erhält. In der Arbeit wird noch die Konstruktion eines Gabriel Graphs [GS69] vorgeschaltet, um die Rechenzeit weiter zu minimieren.

3.2 Dilation

Der vollständige Graph ist ein optimales Netzwerk für die Größe Dilation. Für jedes Knotenpaar wird der Pfad mit nur einer Kante gewählt.

3.3 Congestion

Für die Congestion wird in der Arbeit eine Methode vorgestellt, mit der man das optimale Kommunikationsnetzwerk für Congestion approximiert. Dafür wird der Begriff der Diversität eingeführt. Er bezeichnet die Anzahl an Längenklassen im Netzwerk, wobei sich zwei Kanten in derselben Längenkategorie befinden falls sie sich nicht um mehr als den Faktor 2 unterscheiden. Die Diversität wird definiert als $g(V) := |\{m \mid \exists u, v \in V : \lfloor \log |u, v| \rfloor = m\}|$ und steht in engem Zusammenhang zur Störungszahl des Netzwerks, was in der Arbeit anhand eines Beispiels verdeutlicht wird. In zufällig angeordneten Netzwerken kann man die Diversität als $O(\log(n))$ annehmen.

Ein sogenannter hierarchischer Ebenengraph approximiert nun das kongestionsoptimale Netzwerk. Hierbei ist jede Ebene ein eigener Graph, der bestimmte Eigenschaften erfüllt; und die Vereinigung der Ebenengraphen ergibt den hierarchischen Ebenengraph. Die Anzahl der Ebenen ist in $O(g(V))$ und für jeden Ebenengraphen ist die Störungszahl durch eine Konstante begrenzt (beides folgt aus der Definition des Graphen). Die Störungszahl des Graphen ist daher auch in $O(g(V))$.

Außerdem ist dieser Graph ein schwacher c -Spanner für eine Konstante c , die von den für die Definition des hierarchischen Ebenengraphen festgelegten Werte α und β abhängt. Ein Graph ist ein schwacher c -Spanner falls für alle Knotenpaare u, v des Graphen ein Pfad von u nach v existiert, der komplett im Inhalt eines Kreises um u mit Radius $c \cdot |u, v|$ liegt.

In einem Lemma wird schließlich gezeigt dass der Load eines c -Spanner Graphen gebunden ist durch $l(e) \leq c'g(V)C^*$ für eine Konstante c' und optimale Congestion C^* . Durch Kombination der oberen Schranken für Störungszahl und Load kann auch die

Congestion nach oben abgeschätzt werden durch $O((g(V))^2 C^*)$. Durch den hierarchischen Ebenengraph erhält man somit für zufällig angeordnete Netzwerke eine $O(\log(n)^2)$ Approximation an das kongestionsoptimale Netzwerk.

4 Optimieren mehrerer Größen

Eines der Hauptergebnisse der Arbeit ist dass man kein Pfadsystem finden kann welches mehrere der Größen Dilation, Energy und Congestion gleichzeitig optimiert. Dabei werden alle möglichen Größenpaare betrachtet.

4.1 Congestion und Dilation

In der Arbeit wird auf die Beziehung von Congestion und Dilation im Gitternetzwerk G_n mit Paketnachfrage $w(u, v) = W/n^2$ ($\forall u, v \in V$) eingegangen und folgendes Theorem bewiesen:

Satz 1 Für die Gitter-Knotenmenge G_n mit Gesamtpaketaufkommen W gilt für jedes Pfadsystem P folgende Kompromissbeziehung zwischen Dilation $D_P(G_n)$ und Congestion $C_P(G_n)$:

$$C_P(G_n) \cdot D_P(G_n) \geq \Omega(W). \quad (1)$$

Beweis Für den Beweis werden die n Knoten in 3 Partitionen V_1, V_2, V_3 eingeteilt (siehe Abb. 3). Das kongestionsoptimale Netzwerk ist das Gitternetzwerk in dem alle horizontalen und vertikalen Nachbarknoten verbunden sind. Dieses hat eine Congestion von $O(W/\sqrt{n})$ und in [GK00] wird gezeigt dass dies die bestmögliche Congestion für jedes Netzwerk mit Knotenmenge G_n ist. Daher gilt der Satz auf jeden Fall für eine Dilation $D > \sqrt{n}$ und es wird von nun an die Annahme $D \leq \sqrt{n}$ getroffen.

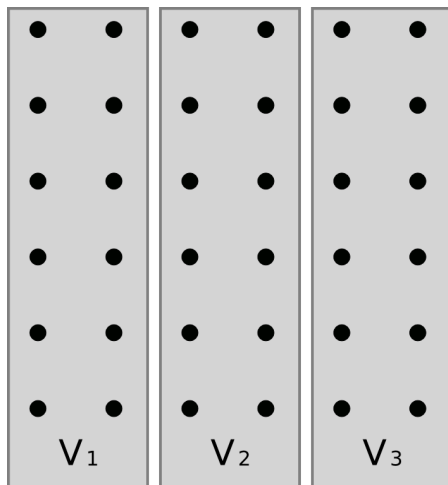


Abb. 3: G_{36} mit Partitionen V_1, V_2, V_3

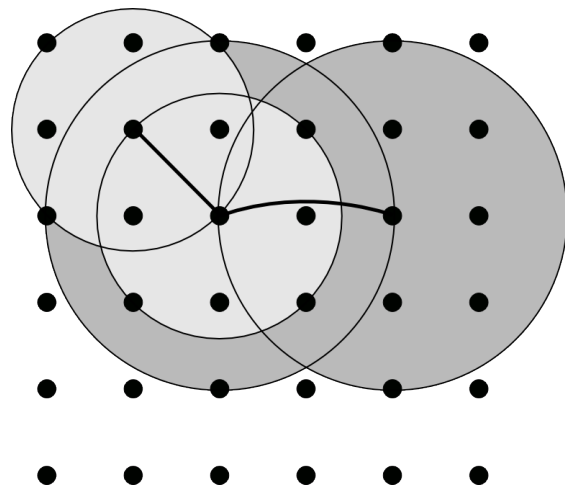


Abb. 4: ind. Kapazität eines Pfades

Es werden nun nur die Pfade eines Pfadsystems P betrachtet, die Knoten aus V_1 und V_3 verbinden. Wenn man nun 2 Knoten $v_i \in V_1$, $v_j \in V_3$ betrachtet, kann die Zahl der Kanten des Pfades $p_{i,j}$ höchstens gleich D sein. Die ins Netzwerk induzierte Kapazität dieses Pfades ist mindestens $\kappa(p_{i,j}) \geq c_1 l(p_{i,j}) \sum_{e \in p_{i,j}} |e|^2$, wobei $l(p_{i,j})$ den Informationsfluss des Pfades bezeichnet und gleich der Anzahl der zwischen v_i und v_j übertragenen Pakete ist (siehe Abb. 4). Daher gilt $\kappa(p_{i,j}) \geq c_1 \frac{W}{n^2} \sum_{e \in p_{i,j}} |e|^2$. Dieser Term wird minimal, falls der Pfad aus der maximale Anzahl an Kanten $D_P(G)$ mit Kantenlänge $|e| = \frac{|v_i, v_j|}{D_P(G)}$ besteht; dadurch kann man die Kapazität weiter abschätzen mit $\kappa(p_{i,j}) \geq c_1 \frac{W}{n^2} D_P(G) \left(\frac{|v_i, v_j|}{D_P(G)} \right)^2$ und mit $|v_i, v_j| \geq \frac{1}{3} \sqrt{n}$ folgt schließlich $\kappa(p_{i,j}) \geq \frac{c_1 W}{9n D_P(G)}$.

Nun wird noch die Abschätzung der Kapazität nach oben benötigt. Dazu wird das Gebiet betrachtet in dem die Fläche mit positiver Kapazität auf jeden Fall enthalten ist, dies trifft zu bei einem Quadrat S mit Seitenlänge $\sqrt{2n} + \sqrt{n} + \sqrt{2n} = (2\sqrt{2} + 1)\sqrt{n}$, da für die Diagonalkanten das Störgebiet maximal wird (Abb. 5). Mit Hilfe des Lemma 7 aus

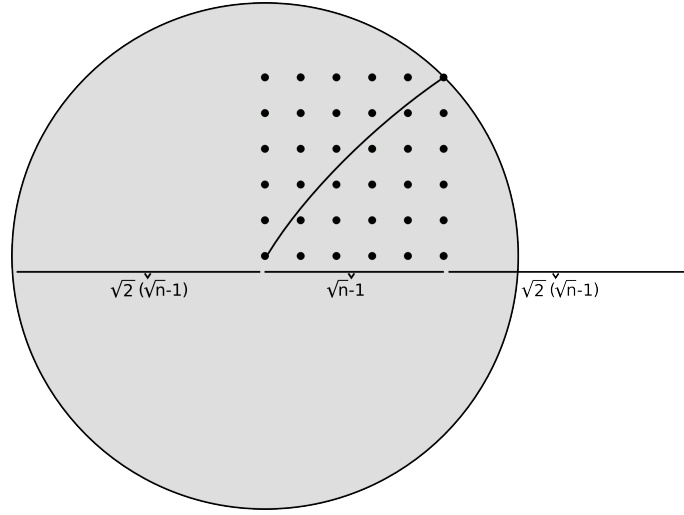


Abb. 5: Bestimmen der Kantenlänge von S

[HSVGO2] kann die Kapazität einer Fläche nach oben abschätzen durch die Congestion des Netzwerks multipliziert mit der betrachteten Fläche und einer Konstanten. Also gilt $\kappa(S) \leq c_2 C_P(G) A(S) = c_2 C_P(G) ((2\sqrt{2} + 1)\sqrt{n})^2 = c_2 C_P(G) (2\sqrt{2} + 1)^2 n$. Da die Summe der Kapazitäten aller Pfade nicht die Kapazität des Quadrats überschreiten kann, ist es möglich beide Abschätzungen zu kombinieren. Da es höchstens $n^2/9$ verschiedene Pfade zwischen Knoten aus V_1 und V_3 gibt, folgt $\frac{n^2}{9} \frac{c_1 W}{9n D_P(G)} \leq c_2 C_P(G) (2\sqrt{2} + 1)^2 n$ und durch umstellen der Ungleichung zu $\frac{c_1}{81 c_2 (2\sqrt{2} + 1)^2} W \leq C_P(G) D_P(G)$ die Behauptung.

4.2 Dilation und Energy, Congestion und Energy

Für die Größen Dilation und Energy wird eine weitere Kompromissbeziehung gezeigt. Das Produkt der Größen Unit-Energy und Dilation hat das Quadrat des Durchmessers

des Netzwerks als untere Schranke; das Produkt von Flow-Energy und Dilation besitzt die untere Schranke d^2W (d bezeichnet den Durchmesser des Netzwerks, W das Gesamtpaketenaufkommen).

Congestion und Energy sind inkompatibel. Es ist nur möglich sich zwischen kleiner Congestion und geringem Energieverbrauch zu entscheiden, jedoch unmöglich diese miteinander abzustimmen.

5 Gliederung des Vortrags

1. Einleitung, Motivation

Kurze Einführung ins Thema und deren Motivation.

2. Beschreibung des Netzwerkmodells

Das in der Arbeit verwendete Netzwerkmodell wird vorgestellt, inklusive deren grundlegender Definitionen.

3. Ergebnisse der Arbeit

Pfadssysteme zum Optimieren einzelner Größen

Betrachtung von mehreren Größen

 Detailliert: Congestion vs. Dilation inkl. Beweis

 Grob: andere Größenpaare

4. Zusammenfassung

Literatur

- [GK00] GUPTA, P. und P.R. KUMAR: *The capacity of wireless networks*. Information Theory, IEEE Transactions on, 46(2):388–404, Mar 2000.
- [GS69] GABRIEL, K. und R. SOKAL: *A new statistical approach to geographic variation analysis*. Systematic Zoology, 18:259–278, 1969.
- [HSVG02] HEIDE, F.M., C. SCHINDELHAUER, K. VOLBERT und M. GRÜNEWALD: *Energy, congestion and dilation in radio networks*. In: *SPAA '02: Proceedings of the fourteenth annual ACM symposium on Parallel algorithms and architectures*, Seiten 230–237, New York, NY, USA, 2002. ACM.
- [HSVG04] HEIDE, F.M., C. SCHINDELHAUER, K. VOLBERT und M. GRÜNEWALD: *Congestion, Dilation, and Energy in Radio Networks*. Theory of Computing Systems, 37(3):343–370, 2004.