

Gradient Clock Synchronization in unterschiedlichen Netzwerkmodellen

Ulrich Helker

12. Februar 2008

In dieser Ausarbeitung wird das Thema “Gradient Clock Synchronization” (GCS) auf der Grundlage der Arbeiten [3] und [4] behandelt. Die Gradient-Eigenschaft besagt, dass die Synchronisation der lokalen Uhren (LCs) zwei verschiedener Knoten in einem Netzwerk um so genauer ist, je geringer ihre Distanz voneinander ist. Ein GCS-Algorithmus besitzt diese Eigenschaft wenn die Abweichung der LCs von zwei Knoten durch eine nicht fallende Funktion ihrer Distanz beschränkt ist. Bei Einhaltung der Gradient-Eigenschaft ist sichergestellt, dass an die Synchronisation von benachbarten Knoten ein höherer Anspruch gestellt wird als an die von weit voneinander entfernte Knoten. Die zugrundeliegenden Arbeiten beschäftigen sich mit unterschiedlichen Netzwerkmodellen. Ein Fokus dieser Arbeit liegt auf der Unterscheidung der betrachteten Modelle und ihrer Einsatzgebiete. In [3] bzw. [4] wird für das jeweils angenommene Modell eine untere Schranke bewiesen. Diese gibt an, welche Abweichungen in den LCs von Knoten auftreten können, wenn bereits ein GCS-Algorithmus auf das Netzwerk angewendet wurde. Diese Schranke ist immer auch von Durchmesser des Netzwerkes abhängig, sodass die Erweiterung eines Netzwerkes die maximal erreichbare Genauigkeit einer GCS verschlechtern kann.

1 Motivation

1.1 Gradient Clock Synchronization

Es wird von einem Netzwerk ausgegangen, dass eine Menge von Knoten besitzt, die jeweils eine eigene interne Hardware-Uhr (Hardware Clock, HC) besitzen. Die HC hat einen Drift der sich in einem bekannten Rahmen bewegt. Die Aufgabe eines *lokalen Synchronisationsalgorithmus* (Local synchronization algorithm, LSA) ist es für einen Knoten durch das Auslesen seiner HC und aus den

von benachbarten Knoten erhaltene Nachrichten eine logische Uhr (logic clock, LC) zu errechnen, die sich von den LCs der anderen Knoten im Netzwerk möglichst wenig unterscheidet. In dieser Arbeit wird ausschließlich auf die interne Synchronisation eines Netzwerkes eingegangen und es wird die externe Synchronisation vernachlässigen, die auch Nachrichten von außerhalb des Netzwerkes einbezieht.

Es folgen Beispiele in denen LSA’s angewendet werden:

- In Sensornetzwerken kann es notwendig sein Aussagen zu erreichen wie “Ereignis X geschieht vor Ereignis Y” oder “Ereignisse X und Y geschehen innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls”. [5]
- Man will mit an mobilen Geräten angebrachten Sensoren Geschwindigkeiten (von Feuer, Wasserkontamination oder Tierherden) messen. Dafür ist die Kombination zweier Sensorereignisse notwendig. Je geringer die Distanz der Sensoren ist, desto kritischer ist für eine exakte Geschwindigkeitsmessung ihre Synchronisation. [5] (vergl. GP)
- Durch Synchronisation kann Energie gespart werden. Ein Sender-Empfänger-Knotenpaar kann auf Standby gehen, wenn sie in einem festen Zeitintervall nicht miteinander kommunizieren müssen und auch sonst nicht benötigt werden. [2]

Für die lokale Uhrensynchronisation wurde in [6] ein optimaler LSA gefunden. Optimalität bedeutet für einen LSA, dass die Abweichung der LCs zwischen beliebigen Knotenpaaren so gering wie möglich ist. Die obere Schranke des Algorithmus ist durch den Durchmesser D des Netzwerkes gegeben ($D = \max_{i,j} d_{i,j}$ mit $d_{i,j}$: Distanz zwischen den Knoten i und j).

Die Kritik an diesem Algorithmus bzw. der bisherigen Betrachtungsweise von LSAs ist die folgende:

	Allg. Modell [3]	Sensor-N. Modell [4]
HC-Drift	fest	fest
Unsicherheit in der Nachr.-Verzögerung	fest	keine
Nachr.-Verzögerung	fest	keine
Komm.-Frequenz	variabel	fest

Abbildung 1: Vergleich der beiden Modelle, Quelle: [4]

- Es kann sein, dass benachbarte Knoten mit geringem Abstand einen sehr großen Abweichung haben. Die Abweichung der LC's benachbarter Knoten ist nur durch $O(D)$ beschränkt.
- Es gibt Netzwerke, in denen benachbarte Knoten viel häufiger miteinander kommunizieren als weiter entfernt. Ein gutes Beispiel dafür sind Sensornetzwerke mit einer Baumstruktur, in denen die Daten über Sensoren an den Blättern des Baumes aufgenommen werden und von dort an den Vaterknoten weitergeleitet werden, der die Eingegangenen Daten kombiniert. In einem solchen Fall ist die Synchronisation benachbarter Knoten wichtiger als die weit entfernten Knoten.

Die *Gradient Clock Synchronisation* (GCS) ist ein Ansatz, der den oben beschriebenen Problemen Rechnung trägt. Man möchte ausdrücken, dass an die zu erreichende Genauigkeit der Synchronisation zwischen zwei Knoten ein höherer Anspruch gestellt wird, wenn die Knoten nah beieinander liegen.

Dazu wird die *Gradient-Eigenschaft* (Gradient Property ,GP) eingeführt:

Sei f eine nicht fallende Funktion mit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$. Ein LSA erfüllt die f-GP genau dann wenn für alle Knoten i und j eines Netzwerkes gilt, dass $|L^j(t) - L^i(t)| \leq f(s_{ij})$ ($L^x(t)$ ist der Wert der LC von Knoten x zum Zeitpunkt t , s_{ij} ist der kürzeste Weg zwischen i und j)

Wenn ein LSA die f-GP erfüllt heißt er *f-GCS Algorithmus* (f-gradient clock synchronization algorithm).

1.2 Vergleich der Netzwerkmodelle

Den beiden betrachteten Arbeiten liegen grundsätzlich unterschiedliche Modelle für die betrachteten Netzwerke zugrunde. Eine Übersicht über diese Unterschiede ist in Abb. 1 zu finden. Das Modell aus [3] verfolgt einen eher allgemeinen Ansatz, der Nachrichten-Verzögerungen in Netzwerken ermöglicht und die Nachrichtenfrequenz nicht festlegt. Das Modell in [4] kann als Spezialisierung des Modells aus [3] aufgefasst werden, das auf Sensornetzwerke zugeschnitten ist.

Das Besondere in [4] ist, dass Signale bei der Übertragung ohne Zeitverzögerung am Empfängerknoten ankommen. Dieses Modell wird von den Autoren durch folgende Argumente begründet, die den HC-Drift als deutlich problematischer darstellen als die Nachrichtenverzögerung:

- Der Effekt der Verzögerung bei der Übertragung kann separat betrachtet werden.
- Insbesondere in Sensornetzwerken ist eine unregelmäßige Kommunikation erwünscht, da sie Energie spart. In solchen Fällen fällt der Drift der HC aber viel mehr ins Gewicht als die Verzögerung bei der Nachrichtenübertragung.
- Sensornetzwerke benutzen oft sehr kostengünstige Oszillatoren als HCs die einen hohen Drift aufweisen.
- Die gesendeten Daten können mit einem Zeitstempel versehen werden, sodass die Unsicherheit bei der Nachrichtenverzögerung durch neuere Verfahren stark reduziert werden konnte.

2 Ergebnisse

Das wichtigste Ergebnis jeder der beiden Arbeiten ist der Beweis einer unteren Schranke für das jeweils gewählte Modell. Für [3] ergibt sich für die Abweichung der LCs von zwei Knoten mit Abstand d und für einen Netzwerk-durchmesser von D

$$\Omega\left(d + \frac{\log D}{\log \log D}\right)$$

In [4] ergibt sich für die Abweichung der LCs von zwei benachbarte Knoten als untere Schranke

$$\Omega\left(\frac{\hat{p}d}{(1+\hat{p})} \frac{\log(n-1)}{\log\left(\frac{8(1+\hat{p})}{\hat{p}} \log(n-1)\right)}\right)$$

(\hat{p} : Betrag des größten HC-Driftes im Netzwerk, d : Maximaler Zeitabstand zwischen zwei Kommunikationen eines Knotens mit seinem Nachbarn, n : Maximale Anzahl von Knoten in einer Kette)

In beiden Fällen sieht man, wie die Größe des Netzwerkes in die untere Schranke einfließt. In [3] ist sie durch den Durchmesser D vertreten, in [4] ist sie durch den Parameter n vertreten, wobei $D = n - 1$ gilt.

3 Zusammenfassung der Arbeiten

3.1 Parallelen zwischen den Beweisen

Bei beiden Arbeiten ist der Beweis für die untere Schranke ähnlich aufgebaut. Grob lässt sich der Beweis in drei Teile unterteilen:

Wie in Abb. 2 dargestellt bekommt jeder Knoten k mit $i < k < j$ ab dem spezifischen Zeitpunkt T_k eine neue HC-Rate $h_k^\beta = \gamma$ die gegenüber der Ausführung α um $\frac{\rho}{4+\rho}$ erhöht ist.

Es wird durch den Beweis der folgenden vier Behauptungen gezeigt, dass β dem Lemma genügt:

1. Die Ausführungen α und β sind für alle Knoten ununterscheidbar.
2. Die HC-Raten jedes Knotens in β sind innerhalb der korrekten Schranken.
3. Die Nachrichtenverzögerung in α und β ist im Zeitintervall $[0, S]$ die gleiche. In β ist im Zeitintervall $(S, T']$ die Verzögerung zwischen jedem Knotenpaar k_1 und k_2 innerhalb $[\frac{|k_1-k_2|}{4}, \frac{3|k_1-k_2|}{4}]$
4. $L_i^\beta(T') - L_j^\beta(T') \geq L_i^\alpha(T) - L_j^\alpha(T) + \frac{j-i}{12}$

Die letzte Aussage ergibt sich durch die Kombination der drei vorhergehenden Behauptungen.

3.2.3 “Beschränkten Steigerung”-Lemma

Lemma 3.2. Beschränkten Steigerung (Lemma 7.1 aus [3]) Sei α eine Ausführung von A mit der Dauer $T \geq \tau$, und sei i ein beliebiger Knoten. Angenommen das Folgende gilt:

1. Jeder Knoten hat seine HC-Rate innerhalb $[1, 1 + \frac{\rho}{2}]$ zu jedem Zeitpunkt in α .
2. Die Nachrichtenverzögerung zwischen i und jedem Knoten j ist innerhalb $[\frac{|i-j|}{4}, \frac{3|i-j|}{4}]$ zu jeder Zeit in α .

Dann gilt für jedes $t \geq \tau = \frac{1}{\rho}$, dass $L_i^\alpha(t+1) - L_i^\alpha(t) \leq 16f(1)$.

Dieses Theorem besagt, dass ein Knoten seine LC in einem festen Zeitintervall nur beschränkt erhöhen kann. Das wird mit einem Widerspruchsbeweis gezeigt.

Für den Widerspruchsbeweis betrachtet man einen benachbarten Knoten j von i ($d_{i,j} = 1$) und nimmt man an, dass es in α einen Zeitpunkt $t \geq \tau$ gibt, für den gilt $L_i^\alpha(t+1) - L_i^\alpha(t) > 16f(1)$. Dann muss es auch einen Zeitpunkt $t_0 \in [t, t+1]$ geben für den gilt $L_i^\alpha(t_0 + \frac{1}{8}) - L_i^\alpha(t_0) > 2f(1)$. Man konstruiert nun eine Ausführung β , für die man die HC von i gegenüber der Ausführung α folgendermaßen ändert:

$$h_i^\beta(t) = \begin{cases} h_i^\alpha(t) + \frac{\rho}{4} & \text{falls } t \in [t_0 - \tau, t_0] \\ h_i^\alpha(t) & \text{sonst} \end{cases}$$

Außerdem werden die Zeiten von den auftretenden Ereignisse so anpassen, dass α und β für alle Knoten ununterscheidbar sind. Nun zeigt man noch, dass β die gleichen Einschränkungen für die HC-Raten und die Verzögerungen erfüllt wie α . Durch den Beweis von $H_i\beta(t_0) \geq$

$H_i^\alpha(t_0 + \frac{1}{8})$ kann man zeigen, dass $L_i^\beta(t_0) - L_j^\beta(t_0) > f(1)$ und somit in β die GP verletzt ist. Also existiert auch kein Zeitpunkt $t \geq \tau$ in α für den gilt $L_i^\alpha(t+1) - L_i^\alpha(t) > 16f(1)$, womit das Theorem bewiesen ist.

3.2.4 “Untere Schranke”-Theorem

Theorem 3.3. Untere Schranke (Theorem 8.1 aus [3]) Es gibt eine Ausführung α von A und Knoten i, j mit $d_{i,j} = 1$, sodass $L_i^\alpha(l(\alpha)) - L_j^\alpha(l(\alpha)) = \Omega(\frac{\log D}{\log \log D})$. Daher $f(1) = \Omega(\frac{\log D}{\log \log D})$

Die Idee ist es Ausführungen $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ zu konstruieren, sodass sich für α_k ein Knoten i findet mit $L_i^{\alpha_k}(l(\alpha_k)) - L_{i+1}^{\alpha_k}(l(\alpha_k)) \geq \frac{k}{24}$. Daraus ergibt sich dann $f(1) = \Omega(\frac{\log D}{\log \log D})$.

Es gibt folgende Eigenschaften, die von jeder konstruierten Ausführung α_k und den zugehörigen Knoten i_k und j_k erfüllt werden müssen:

1. $j_k - i_k = n_k$.
2. $\Delta_k \equiv L_{i_k}^{\alpha_k}(l(\alpha_k)) - L_{j_k}^{\alpha_k}(l(\alpha_k)) \geq \frac{k}{24}n_k$. Die Abweichung der LCs von i_k und j_k ist mindestens $\frac{k}{24}$ zum Ende von Ausführung α_k .
3. Für das Intervall $[S, T] = [l(\alpha_k) - \tau n_k, l(\alpha_k)]$ in α_k ist die Verzögerung zwischen zwei beliebigen Knoten i und j gleich $\frac{|i-j|}{2}$. Die HC-Rate jedes Knotens in α_k ist in diesem Intervall 1. (Voraussetzungen für das “Abweichung hinzufügen”-Lemma)
4. Die HC-Rate jedes Knotens ist zu jeder Zeit in α_k innerhalb $[1, 1 + \frac{\rho}{2}]$. (Erste Voraussetzung für das “Beschränkten Steigerung”-Lemma)
5. α_k erfüllt die zweite Voraussetzung für das “Beschränkten Steigerung”-Theorem das die Verzögerung beschränkt (Zweite Voraussetzung für das “Beschränkten Steigerung”-Lemma)

Es liegt eine Ausführung α_0 mit der Länge $\tau(D-1)$ vor, von der weitere Ausführungen α_k konstruiert werden. α_0 hat die folgenden Eigenschaften:

- Die HC-Rate jedes Knotens hat zu jeder Zeit in α_0 den Wert 1.
- Die Verzögerung zwischen zwei beliebigen Knoten i und j ist in allen α_k gleich $\frac{|i-j|}{2}$

Die Konstruktion von α_{k+1} erfolgt nun in den folgenden Schritten

1. Zeige, dass α_k die Voraussetzungen für das “Abweichung hinzufügen”-Theorem erfüllt.

2. Wende das ‘‘Abweichung hinzufügen’’-Theorem auf α_k an und erhalte die Ausfurung β_k mit erhöhter Abweichung zwischen den LCs eines Knotenpaare i_k und j_k .
3. Erweitere β_k zu einer Ausfurung α_{k+1} .
4. Zeige, dass α_{k+1} die Voraussetzungen für das ‘‘Beschränkten Steigerung’’-Theorem erfüllt.
5. Zeige, dass die Abweichung zwischen den Knoten i_k und j_k wegen dem ‘‘Beschränkte Steigerung’’-Theorem durch die Erweiterung in Punkt 3 nicht so stark abgenommen hat wie sie in Punkt 2 erhöht wurde.
6. Zeige dass α_{k+1} die Voraussetzungen erfüllt um die Konstruktion nochmals anzuwenden.

3.3 Sensor-Netzwerk Modell

3.3.1 Definitionen

n : Anzahl der Knoten in der betrachteten Knotenkette.

$H(t)$: Wert der HC zum Zeitpunkt t

$\rho(t)$: Drift einer HC zum Zeitpunkt t . $\rho = \frac{dH(t)}{dt} - 1$

\hat{p} : Maximaler Drift einer LC mit $\hat{p} \geq 0$ und $-\hat{p} \leq \rho \leq \hat{p}$

d : Zeitintervall zwischen zwei Kommunikationen eines Knotens mit dem selben Nachbarn

$T, T' \dots$: Traces, identisch mit den Ausfurungen aus dem allgemeinen Modell

$L^i(t)$: Der Wert der LC von Knoten v_i zum Zeitpunkt t

3.3.2 ‘‘Beschränkte Steigerung’’-Theorem

Theorem 3.4. Beschränkte Steigerung (Theorem 4.1 aus [4]) Gegeben sei ein LSA der die f -GP erfüllt, und alle HC haben den Dirft $\rho = 0$. Ein Knoten kommuniziere mit einem Nachbarn zum Zeitpunkt t_0 und das nächste Mal zum Zeitpunkt $t_0 + d$. Dann kann sich die LC des Knotens in jedem Zeitintervall der Länge $\hat{p}d/4$ das in $[k + 1/4d, k + 3/4d]$ eingeschlossen ist nicht um mehr als $2f(1)$ verändern.

Wenn man von einer Knotennummerierung wie in Abbildung 3 ausgeht, besteht die Idee des Beweises darin den Drift für Knoten v_s mit $s \leq i$ maximal (also mit \hat{p}) zu beschleunigen und für ein Intervall der Länge $\tau = \hat{p}d/4$ innerhalb von $[(t_0 + 1/4)d, (t_0 + 3/4)d]$ zu zeigen, dass die Steigerung der LC von v_i durch $2f(1)$ beschränkt ist.

In [4] wird in dem nachfolgenden Korollar die Beschränkung im Intervall $[(k + 1/4)d, (k + 3/4)d]$ auf eine Beschränkung über die gesamte Zeit ausgedehnt. Wie das gelingt ist in Abbildung 3 dargestellt: Der Knoten v_i kommuniziert mit zwei statt mit nur einem Knoten, nämlich mit v_{i-1} zur Zeit $0, d, \dots, kd, (k + 1)d, \dots$ und mit v_{i+1} zur

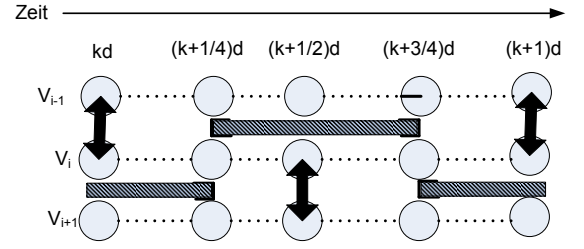


Abbildung 3: ‘‘Beschränkte Steigerung’’ für v_i

Zeit $\frac{1}{2}d, d + \frac{1}{2}d, \dots, kd + \frac{1}{2}d, (k+1)d + \frac{1}{2}d, \dots$. Die Kommunikationen sind durch Pfeile dargestellt. Durch die schraffierten Flächen ist jeweils angedeutet in welchen Intervallen die Steigerungen der LC’s der darüber und darunterliegenden Knoten beschränkt ist. Durch Kombination beider Beschränkungen sieht man nun, dass die LC von v_i über die gesamte Zeit beschränkt ist.

3.3.3 ‘‘Abweichung hinzufügen’’-Theorem

Theorem 3.5. Abweichung hinzufügen (Theorem 4.3 aus [4]) Gegeben sein ein Trace T , zwei Knoten v_i und v_j , und ein Zeitintervall $I = [t_0, t_1]$, $t_1 = t_0 + \frac{1}{2}(j - i)d$. Der Zeitunterschied zwischen zwei Kommunikationen eines Knotens zum gleichen Nachbarn sei d , und der zwischen zwei unterschiedlichen Kommunikationen mindestens $d/2$. Zusätzlich nimmt man an, dass alle Drifts ρ sind 0 in I und dass zur Zeit t_1 gilt $L^j(t_1) - L^i(t_1) = \lambda$. Dann existiert ein anderer Trace T' der identisch zu T vor t_0 ist und der zur Realzeit $t_2 = t_1 - (j - i)\frac{\hat{p}d}{2(1+\hat{p})}$ erfüllt dass $L^j(t_2) - L^i(t_2) \geq \lambda + (j - i)\frac{\hat{p}d}{4(1+\hat{p})}$.

Bei diesem konstruktivem Beweis wird aus einem gegebenen Trace T ein neuer Trace T' erzeugt. Die Vergrößerung der Abweichungen der LCs in dem neu konstruierten T' wird folgendermaßen erreicht: Der Drift (d.h. Abweichung von der HC-Rate 1) der Knoten wird entsprechend der Abb. 4 (maximal) erhöht bzw. verringert. In Abb. 4 sieht man leicht, dass immer dann wenn eine Kommunikation zwischen zwei Knoten stattfindet diese bis zu diesem Zeitpunkt die gleiche Anzahl an Beschleunigungen bzw. Verlangsamungen erfahren haben. Für die einzelnen Knoten erscheinen die Traces T und T' also identisch.

τ sei nun die Differenz aus den Zeitpunkten t_2 und t_1 . Es ergibt sich $\tau = (j - i)\frac{\hat{p}d}{2(1+\hat{p})}$. Man kann nun beweisen, dass für die beiden Knoten v_i und v_j die Abweichung ihrer LCs in t_2 in T' mindestens um $\tau/2$ größer sein muss als ihre Abweichung in t_1 im ursprünglichen T .

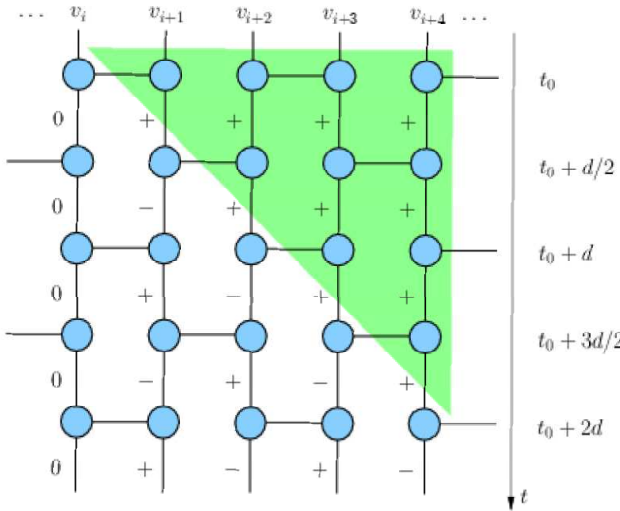


Abbildung 4: Änderung der HC-Raten, Quelle: [4]

3.3.4 “Untere Schranke”-Theorem

Theorem 3.6. Untere Schranke Trace-Konstruktion (Theorem 4.4 aus [4]) Geben seien beliebige $k \geq 0$, $n > n_k > 0$ und t_0 . Geben sei ein Trace T mit den folgenden Eigenschaften:

- Der Trace ist definiert in $I = [t_0, t_1]$, wobei $t_1 = \frac{1}{2}n_k d$.
- Der Drifts ρ aller Knoten sind 0 in I .
- Der Zeitabweichung zwischen zwei Kommunikationen eines Knotens zum selben Nachbarn ist d und der zwischen zwei unterschiedlichen Kommunikationen ist mindestens $d/2$.
- Die Abweichung der LCs zwischen zwei beliebigen Knoten v_{i+n_k} und v_i zur Realzeit t_{2k+1} ist beschränkt durch $L^{i+n_k}(t_1) - L^i(t_1) \geq kn_k \frac{\gamma}{8}$.

Für ein gegebenes n_k definieren wir $n_{k+1} = \frac{n_k \gamma^2}{64df(1)} < n_k$. Dann gibt es für jeden LSA einen anderen Trace der mit einem Trace T' endet welcher die folgenden Eigenschaften hat:

- Der Trace ist definiert in $I = [t_2, t_3]$, wobei $t_2 = t_1 - n_k \frac{\gamma}{2}$ und $t_3 = t_2 + \frac{1}{2}n_{k+1}d$.
- Der Drifts ρ aller Knoten sind 0 in I .
- Der Zeitabweichung zwischen zwei Kommunikationen eines Knotens zum selben Nachbarn ist d und der zwischen zwei unterschiedlichen Kommunikationen ist mindestens $d/2$.

- Die Abweichung der LCs zwischen zwei beliebigen Knoten v_{j+n_k} und v_j ist beschränkt durch $L^{j+n_k}(t_3) - L^j(t_3) \geq (k+1)n_{k+1} \frac{\gamma}{8}$.

Theorem 3.7. Untere Schranke (Theorem 4.5 aus [4]) Geben sei ein beliebiger LSA. Dann gibt es einen Trace sodass zwei Knoten v_i und v_j mit $j = i + 1$ zum Zeitpunkt t eine Abweichung ihrer LCs haben

$$|L^j(t) - L^i(t)| \geq \left(\frac{\hat{p}d}{(1+\hat{p})8} \frac{\log(n-1)}{\log\left(\frac{8(1+\hat{p})}{\hat{p}} \log(n-1)\right)} \right)$$

Ähnlich dem allgemeinen Modell in [3] werden auch in [4] zum Beweis der unteren Schranke Traces (im allgemeinen Modell waren es Ausführungen) konstruiert, sodass durch das abwechselnde Anwenden des “Abweichung hinzufügen”-Theorems und des “Beschränkte Steigerung”-Theorems gezeigt werden kann, dass es möglich ist einen Trace zu konstruieren, in dem zwei benachbarte Knoten eine Abweichung ihrer LCs haben, die die zu beweisende untere Schranke respektiert.

Zunächst wird durch den Beweis von 3.6 gezeigt, dass es für jeden k 'ten Trace T der im Intervall $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ definiert ist und die beschriebenen Eigenschaften hat, auch einen $k+1$ 'ten Trace T' mit $n_{k+1} = \frac{n_k \gamma^2}{64df(1)} < n_k$ gibt für den die beschriebenen Eigenschaften gelten und der also im Intervall $[t_{2(k+1)}, t_{2(k+1)+1}]$ definiert ist.

Der Beweis wird mit Hilfe des “Abweichung hinzufügen”-Theorems und des “Beschränkte Steigerung”-Theorems geführt, deren Voraussetzungen von Trace T erfüllt werden, weil sie zu den aufgelisteten Eigenschaften gehören. Ziel ist es nun für 3.7 zu zeigen, dass man immer einen Trace T' konstruieren kann, sodass es zwei benachbarte Knoten i und j gibt für die die beschriebenen Eigenschaften gelten. Hat man dies gezeigt ist auch die Schranke gezeigt. Um diesen Trace zu konstruieren wendet man iterativ die vorherige Konstruktionsvorschrift auf einen beliebigen Ausgangstrace an. Das Verfahren ist in Abb. 5 dargestellt. Die dunklen Flächen deuten die Knoten an, auf die das “Abweichung hinzufügen”-Theorem angewendet wurde. Man beginnt die Iteration der Verfahrens mit $k = 0$ und $n_k = n_0 = n - 1$ und lässt das Intervall beim t_0 beginnen. Hier ist $n - 1$ die Hop-Distanz (vgl. [1]) des Pfades zwischen den beiden äußersten Knoten der betrachteten Knotenkette. Durch Auflösen der Formel für $n_k = 1$ nach k erhält man die Anzahl der notwendigen Iterationsschritte um einen Trace zu erzeugen der zwei benachbarte Knoten mit einer Abweichung von $\frac{\hat{p}d}{(1+\hat{p})} \frac{k}{8}$ hat. Durch Einsetzen des errechneten k in diese Formel ergibt sich die gewünschte untere Schranke.

Literatur

- [1] ANTHONY BUSSON¹, GUILLAUME CHELIUS und ERIC

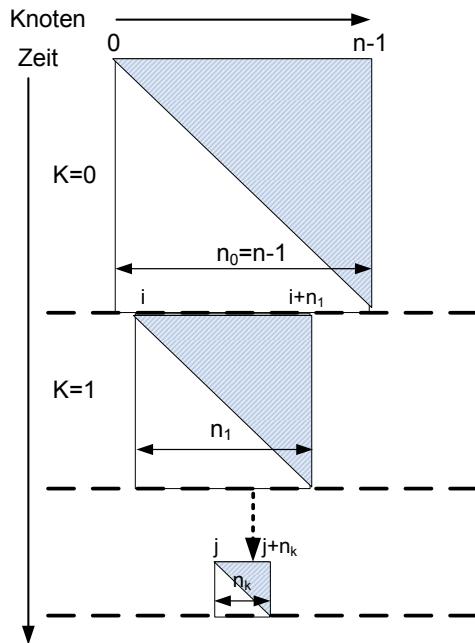


Abbildung 5: Konstruktion der Traces, Quelle: [4]

FLEURY: *From euclidian to hop distance in multi-hop radio networks: a discrete approach*. 2006.

- [2] BENJIE CHEN, KYLE JAMIESON, HARI BALAKRISHNAN und ROBERT MORRIS: *Span: An Energy-Efficient Coordination Algorithm for Topology Maintenance in Ad Hoc Wireless Networks*. *Wireless Networks*, 8(5):481–494, 2002.
- [3] FAN, RUI und NANCY LYNCH: *Gradient clock synchronization*. *PODC '04: Proceedings of the twenty-third annual ACM symposium on Principles of distributed computing*, Seiten 320–327, 2004.
- [4] MEIER, LENNART und LOTHAR THIELE: *Gradient clock synchronization in sensor networks*. *TIK Report*, (219), 2005.
- [5] RÖMER, KAY: *Time synchronization in ad hoc networks*. In: *MobiHoc '01: Proceedings of the 2nd ACM international symposium on Mobile ad hoc networking & computing*, Seiten 173–182, New York, NY, USA, 2001. ACM.
- [6] SRIKANTH, T. K. und SAM TOUEG: *Optimal clock synchronization*. *J. ACM*, 34(3):626–645, 1987.