Inhaltsverzeichnis

Seminar „Algorithms for Wireless Networks“
Leitung: Prof. Dr. Berthold Vöcking
RWTH Aachen

Ausarbeitung zum Fachbeitrag „On the Power Assignment Problem in Radio Networks“

Erika Jongiran, Matrikel-Nr. 228577
Betreuer: Dipl.-Inform. Alexander Fanghänel

12.02.2008

Diese Ausarbeitung ist eine Zusammenfassung des Fachbeitrags „On the Power Assignment Problem in Radio Networks“[1], der von A. Clementi, P. Penna und R. Silvestri verfasst ist. Die Aufgabe des vorgestellten Problems MIN dD h-RANGE ASSIGNMENT besteht darin, minimale Energieverbrauchskosten zu erlangen, während die Signalübertragung zwischen Stationen in drahtlosen Netzwerken nur höchstens in der Anzahl von h Hops erfolgt. Die endliche Menge von Stationen wird als eine endliche Menge von Punkten S in einem d-dimensionalen Euklidischen Raum dargestellt. Hier werden zwei Aspekte betrachtet, nämlich der Kompromiss zwischen Energieverbrauch und der Anzahl von h, deren Grenzen durch Funktionen beschrieben werden und die Komplexitäten der Probleme, die weiterhin in den speziellen Fällen MIN 2D RANGE ASSIGNMENT und MIN 3D RANGE ASSIGNMENT betrachtet werden.

1 Einleitung

Grundlage dieser Ausarbeitung ist die Betrachtung spontan gebildeter drahtloser Netzwerke, welche ohne zentralen Router bzw. Access Point auskommen müssen. In solchen Netzwerken wird das Signal nur in einem *Hop* (direkt) innerhalb eines Übertragungsbereiches von einer Station zu einer anderen Station weitergeleitet. Die Kommunikation zwischen zwei Stationen außerhalb des Übertragungsbereiches benötigt dagegen mehrere Hops. Somit muss jeder Station ein entsprechender Übertragungsbereich zugeordnet werden. Weiterhin wird nicht nur darauf geachtet, dass bei einem festen h jede Station mit jeder beliebigen anderen Station kommunizieren kann; es ist ebenso wichtig, die Energiekosten so gering wie möglich zu halten.

Mathematisch formal geschrieben: Ein „range assignment“ ist eine Funktion $r : S \to \mathbb{R}^+$, wobei S eine Menge von Stationen ist. Ein $s \in S$ kann das Signal direkt zu $s' \in S$ übertragen, wenn für die Distanz zwischen s und s' $d(s, s') \leq r(s)$ gilt. Eine ideale Umgebung angenommen, sind die Kosten von „range assignment“ die Summe aller quadratischen Energieverbrauchskosten $cost(r) = \sum\limits_{s \in S} (r(s))^2$.

MIN dD h-RANGE ASSIGNMENT ist ein Zuweisungsproblem in einem d-dimensionalen Euklidischen Raum, um minimale Kosten zu bekommen, so dass die Kommunikation zwischen jedem Paar der Stationen nur höchstens in der Anzahl von h Hops erfolgt. Die optimalen Kosten von MIN dD h-RANGE ASSIGNMENT in einer gegebenen Instanzmenge S werden als $opt_h(S)$ bezeichnet. Die Bezeichnung von MIN dD RANGE ASSIGNMENT gilt für den Fall $h = |S| - 1$.

Der Kompromiss zwischen Energieverbrauch und der Anzahl von h wird in Kapitel 2 erläutert. Die Komplexitäten der Probleme werden in Kapitel 3 weiter betrachtet.

2 Energieverbrauch in Abhängigkeit von h

Dieses Kapitel handelt von Energieverbrauchkosten in Abhängigkeit h. Zusammengefasst stellt man fest, dass die erfoderliche Energiekosten exponentiell sinken, wenn die Anzahl der erlaubten Hops linear erhöht wird. Nun bezeichnet man die optimalen bzw. minimalen Kosten eines „range assignment“ $opt_h(S)$, wobei jede Station die Basisstation höchstens in Anzahl von h Hops erreichen kann. Formal : Sei $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$ eine Menge von n Punkten (Stationen) in einem Euklidischen Ebene ε mit Distanzfunktion $d : \delta^2 \to \mathbb{R}^+$. Nun definiert man den maximalen Abstand zweier Punkten $D(S) = max\{d(s_i, s_j)|s_i, s_j \in S\}$ und den minimalen Abstand zweier verschiedenen Punkten $\delta(S) = min\{d(s_i, s_j)|s_i, s_j \in S, i \neq j\}$. Anschließend sucht man die untere Grenze des minimalen Energieverbrauches (Funktion von $|S|$ und h, mit minimalem Abstand zwischen jedem Paar der Stationen). Für alle Konstanten $h > 0$, und für alle Mengen S in einem planaren Graphen gilt: $opt_h(S) = \Omega(\delta(S)^2|S|^{1+1/h})$.

Nun ermittelt man die obere Grenze des minimalen Energieverbrauches (Funktion von $|S|$ und h, mit maximalem Abstand zwischen jedem Paar der Stationen). Für alle Mengen von Stationen S in einem planaren Graphen ist es möglich, ein zulässiges „range assignment“ $r_h(S)$ zu konstruieren, so dass $cost(r_h(S)) = O(D(S)^2|S|^{1/h})$ für alle Konstanten $h > 0$. Zur Veranschaulichung der Kombination beider Grenzen wird eine planare Konfiguration G_n benutzt, wobei die n Stationen in einem quadratischen Gitter mit Seitenlänge $\sqrt{n}$ angeordnet sind und der Abstand zwischen adjazenten Paaren von Stationen eine Einheit ist. Die Formel $opt_h(G_n) = \Theta\left(n^{1+1/h}\right)$ wird aus der oben beschriebenen Formeln abgeleitet. Diese Konfiguration ist für die Betrachtung von gleichverteilten Instanzen geeignet. Damit ergibt es sich folgende wichtige Formel:

Sei S nun eine Familie von gleichverteilten Instanzen (wobei für alle $S \in$ S, $\delta(S) \geq cD(S)/\sqrt{|S|}$;$c > 0$. Informell bedeutet es, dass der Abstand jeweils zweier verschiedener Stationen nicht zu klein ist). Für alle $S \in$ S, gilt dann

$$opt_h(S) = \Theta(\delta(S)^2|S|^{1+1/h})$$

für alle Konstanten $h > 0$.

Nun kann man auch die Formel für zufällig verteilten Instanzen erweitern. Sei S^R eine Menge von n Stationen, die zufällig in einem Quadrat mit Seitenlänge l ausgewählt ist, dann sind die optimalen Kosten mit hoher Wahrscheinlichkeit

$$opt_h(S^R) = \Theta(l^2 n^{1/h})$$

für alle Konstanten $h > 0$.

3 Komplexität von Min dD h-Range Assignment

3.1 Min 2D h-Range Assignment

Dadurch, dass die untere Grenze für den minimalen Energieverbrauch für alle möglichen Instanzen S gilt, und die entsprechende range assignment, um eine obere Grenze anzugeben, in angemessener Zeit $O(h|S|)$ durchgeführt werden kann, lässt sich leicht folgern, dass Min 2D h-Range Assignment für gleichverteilte Instanzen in APX[1] und für zufällig verteilte Instanzmengen S in Av-APX liegt.

3.2 Min 2D Range Assignment ist NP-hart

Dem Beweis, dass das Min 2D Range Assignment Problem NP-hart ist, liegt folgende Idee zugrunde: Ausgangspunkt ist der zugehörige Kommunikationsgraph G. Mit Hilfe des im Folgenden beschriebenen Verfahrens lässt sich in polynomieller Zeit ein theoretisches Konstrukt $S_{2D}(G)$ erzeugen. $D(G)$ bedient sich zahlreicher Hilfsmittel um eine Grundlage für das Min Vertex Cover Problem[2], beschränkt auf planare, kubische Graphen, zu bilden. Ziel der Beweisführung ist es, die Lösung für das Min Vertex Cover Problem (K), angewendet auf $D(G)$, auf das Min 2D Range Assignment Problem zu übertragen. Dies geschieht, indem die ermittelten Punkte aus K auf entsprechende Punkte in r_K abgebildet werden. Da der erste Schritt, die Erzeugung von $S_{2D}(G)$, in polynomieller Zeit durchgeführt werden kann, ist die Berechnung von r_K mindestens genauso komplex wie die Berechnung von K.

$S_{2D}(G)$ ist ein theoretisches Konstrukt, abgeleitet von einem planaren Graphen G, um ein zulässiges range assignment zu bekommen. Die Konstruktion erfolgt durch folgende Schritte. Gegeben ist ein planarer kubischer Graph G, wobei seine Kanten sich bei einer Abbildung auf eine Ebene nicht kreuzen (siehe auch [2]). Nun konstruiert man eine orthogonale Zeichnung von G. Diese Zeichnung wird als $D(G)$ bezeichnet, wobei sie nachfolgende Eigenschaften besitzt. Jeder Knoten ist durch Integer-Koordinaten gekennzeichnet. Die Kanten sind Polylines mit zueinander orthogonalen Segmenten und jede Kante besitzt maximal einen Knick. Die zugehörigen Knicke besitzen ebenfalls Integer-Koordinaten. Nun fügt man zwei Knoten für jeden Knick in $D(G)$ ein, so dass jede Kante

[1] Die Klasse APX enthält diejenigen Optimierungsprobleme, für die es einen polynomiellen $\alpha-$Approximationsalgorithmus für ein beliebiges, aber konstantes α gibt. [3]

[2] eine Teilmenge $K \subseteq V$ eines Graphen $G(V, E)$, so dass aus jeder Kante aus E mindestens ein Endpunkt enthalten ist

ein „straight-line“[3] Segment besitzt. Dann wird jede Kante durch eine Menge von passenden Stationen, sogenannten Gadgets, ersetzt. Um ein Gadget zu modellieren, wählt man zunächst eine Kante aus, z.B. Kante (a, b). Die Menge aller hinzuzufügenden Knoten, also $X_{ab} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{l_1}\}$, $Y_{ab} = \{y_{ab}, y_{ba}\}$, $Z_{ab} = \{z_1, \ldots, z_{l_2}\}$ und $V = \{a, b\}$, sind Bausteine eines Gadgets. X_{ab} und Z_{ab} sind Ketten von Punkten, bei der jedes Glied den Abstand δ (bzw. δ') zum Vorgänger besitzt. Diese Menge von Punkten wird in zwei Komponenten gruppiert, nämlich VX ($X_{ab} \bigcup V_{ab}$) und YZ ($Y_{ab} \bigcup Z_{ab}$), deren relativer Abstand $\delta + \epsilon$ ist.

Die Reduzierbarkeit von Min 2D Range Assignment beruht auf folgenden Ideen. Die Gesamtzahl aller *radio bridges*[4] aus V soll minimiert werden, um die Kosten einer kanonischen Lösung[5] zu senken, wobei die Kosten einer entsprechenden kanonischen Lösung zu einer zulässigen range assignment kleiner oder gleich den Kosten der range assignment ist. Der Graph $D(G)$ hat ein Min Vertex Cover K gdw. eine kanonische Lösung $S_{2D}(G)$ existiert mit $|K|$ radio bridges. Jede nicht kanonische zulässige Lösung kann in polynomieller Zeit in eine kanonische Lösung umgewandelt werden.

3.3 Min 3D Range Assignment **ist APX-vollständig**

Da das Min Vertex Cover Problem, beschränkt auf kubische Graphen, APX-vollständig ist, zeigt man dessen Reduzierbarkeit auf das Min 3D Range Assignment Problem, unter Beibehaltung der Approximierbarkeit. Es wird ein existierender Approximationalgorithmus für Min 3D Range Assignment angenommen, der auf $S_{3D}(G)$ operiert. Anschließend wird die approximative Lösung für Min 3D Range Assignment in polynomieller Zeit auf die ebenso approximative Min Vertex Cover Lösung abgebildet.

Die Konstruktion von $S_{3D}(G)$ ist analog zur Konstruktion von $S_{2D}(G)$. Im ersten Schritt wird eine 3-dimensionale orthogonale Zeichnung von einem 3-Grad Graphen G $D(G)$ gebildet, aber mit folgenden Unterschieden: Jede Kante oder Polyline besitzt höchstens drei Knicke und jeder Knoten ist durch Integer-Koordinaten gekennzeichnet, dessen Abstand a zu anderen Knoten $L_{min} \leq a \leq m$ wobei L_{min} die minimale Distanz zwischen zwei Knoten und m die Anzahl der Kanten in $S_{3D}(G)$ ist. Es werden hier keine neue Knoten für die Knicke hinzugefügt, wobei die Beibehaltung der Approximierbarkeit dadurch geschieht, indem innerhalb der YZ-Komponente der Gadgets die Euklidischen Ebene gewechselt werden kann. Genauer beschrieben: jede Polyline wird durch ein Gadget mit folgenden Eigenschaften ersetzt. Die Abstände der Punkte innerhalb der X-Ketten und innerhalb der Z-Ketten sind gleich und werden mit ϵ bezeichnet, wobei zusätzlich die Abstände der Z-Punkte zu jedem X-Punkt konstant und größer als l sind, wobei $\epsilon < l \leq 1; l, \epsilon > 0$. Dieser Aufbau der 3D-Gadgets erleichtert die gesamte Konstruktion von $S_{3D}(G)$, die außerdem die Ungleichung $l^2 < L_{min}^2/m$ erfüllen muss, so dass zu jeder zulässige range assignment eine kanonische range assignment r^c existiert mit $cost(r^c) \leq cost(r)$. Die polynomielle Lücke zwischen dem Wert l (minimaler Abstand

[3] die Zeichnung einer Kante enthält keinen Knick

[4] radio bridge: Wenn $r(v) = \delta + \epsilon, v \in \{a, b\}$, dann ist v eine radio bridge. Dies gilt für mindestens ein v aus jedem Gadget.

[5] kanonische Lösung = eine Lösung mit vordefinierten Eigenschaften

zwischen VX- und YZ-Komponente in einem Gadget) und dem Wert ϵ, die wichtig für die Gewichtung der bridge Punkte v in V $(r(v) = l; v \in V)$ bei der kanonischen Lösung ist, wird beibehalten. Die andere Eigenschaft, die eine Rolle für die Beibehaltung der Approximierbarkeit spielt, ist die Erhöhung der Anzahl der gleich distanziierten Stationen in den X- und Z-Ketten bei jedem Gadget, die die gesamten Kosten der Ketten verringert.

4 Zusammenfassung

Die zwei Aspekte, die in dieser Ausarbeitung zu dem Thema „Energiezuweisungsprobleme“ betrachtet wurden, sind der Energieverbrauch in Abhängigkeit von h hops und die Komplexität der Probleme. Für den ersteren Aspekt wurden die untere Grenze, obere Grenze und die Kombination beider Grenzen des minimalen Energieverbrauchs beschrieben.

Die Ergebnisse bezüglich des zweiten Aspekts der vorgestellten Probleme sind hier nochmal in folgender Tabelle erfasst.

Probleme	Ergebnisse
Min 2D Range Assignment	NP hart
Min 2D h-Range Assignment, gleichverteilt	APX
Min 2D h-Range Assignment, zufällig verteilt	Av-APX
Min 3D Range Assignment	APX vollständig

Tabelle 1: Komplexitäten der Min dD h-Range Assignment Probleme

Aber die offene Frage ist, ob dieses Problem APX-vollständig ist oder sogar zur PTAS gehört. Min 3D Range Assignment gehört zur APX aber nicht zur PTAS, ausser wenn $P = NP$. Die Beweisidee beruht auf der Reduzierbarkeit von Min Vertex Cover, beschränkt auf kubische Graphen, unter Beibehaltung der Approximierbarkeit. Die andere offene Frage ist, ob man die Approximationsalgorithmus verbessern kann.

Literatur

[1] Clementi Andrea E. F., Penna Paolo, Silvestri Riccardo: *On the Power Assignment Problem in Radio Networks.* Rom 2004.

[2] Volkmann Lutz: *Diskrete Strukturen. Eine Einführung.* Aachen 2000.

[3] Vöcking Berthold: *Einführung in die Komplexitätstheorie.* Aachen 2005.