

Seminar Algorithms for Wireless Networks am Lehrstuhl  
für Informatik 1 der RWTH Aachen

# **Conflict-Free Colorings of Simple Geometric Regions with Applications to Frequency Assignment in Cellular Networks.**

Manuel Kallenbach

12. Februar 2008

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Motivation</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Hauptergebnisse</b>	<b>3</b>
2.1	Kreisscheiben . . . . .	3
2.2	Rechtecke und regelmäßige Sechsecke . . . . .	4
2.3	Kongruente, punktsymmetrische Flächen . . . . .	5
2.4	Ein äquivalentes Problem: CF-Färbung von Punkten in Bezug auf Flächen	5
<b>3</b>	<b>Beweisführung</b>	<b>6</b>
3.1	Begriffserklärungen . . . . .	6
3.1.1	Kombinatorische Anordnung . . . . .	6
3.1.2	Dualer Range-Space . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Beweisführung</b>	<b>6</b>
4.1	Ein allgemeiner Algorithmus . . . . .	6
4.2	Bedingungen für $O(\log X )$ Farben . . . . .	7
4.2.1	Kreisscheiben in der Ebene . . . . .	7
4.2.2	Skalierte Verschiebungen konvexer Gebiete in der Ebene . . . . .	7

# 1 Motivation

Die Zell-Topologie wird typischerweise in drahtlosen Netzwerken eingesetzt. Hierbei existieren zwei verschiedene Arten von Knoten: die Basisstationen und die Clients. Clients können sich nur mit Basisstationen verbinden und suchen daher permanent nach solchen mit gutem Empfang. Daher werden diesen feste Frequenzen zugewiesen. Wenn sich nun ein Client im Empfangsbereich zweier Basen befindet, die die selbe Frequenz nutzen, kommt es zu gegenseitiger Interferenz und die sich störenden Basisstationen können nicht mehr benutzt werden. Daher muss sich jeder Client in einem Bereich befinden, in dem er eine Basisstation stark genug empfängt und Interferenzen ausgeschlossen sind. Da die Anzahl der zur Verfügung stehenden Frequenzen beschränkt ist, wird nach einer Methode gesucht, die eine minimale Frequenzverteilung bietet.

Dieses Problem wird im Artikel auf folgendes 'minimal conflict-free coloring problem' (min-CF-Färbung) abstrahiert:

**DEFINITION 1.1** Sei  $X$  ein fester Wertebereich,  $S$  eine Menge von Untermengen von  $X$ . Eine Funktion  $\chi: S \rightarrow \mathbb{N}$  ist eine min-CF-Färbung von  $S$ , wenn für jedes  $x \in \cup_{S \in S} S$  eine Farbe  $i$  existiert, sodass die Menge  $\{S \in S : x \in S \text{ und } \chi(s)=i\}$  genau ein Element enthält.

Eine minimale konflikt-freie Färbung hat nun zum Ziel, die Anzahl der benutzten Farben zu minimieren.

Man kann leicht nachweisen, dass dieses Problem nicht leichter als die Knotenfärbung in Graphen und damit NP-schwer ist. Selbst eine Annäherung mit einem Näherungsverhältnis besser als  $4/3 - \epsilon$  ist NP-schwer für alle  $\epsilon > 0$ .

## 2 Hauptergebnisse

Das Problem wird auf Mengensysteme  $(X, R)$  beschränkt, wobei  $X$  eine Menge von Punkten in der Ebene und  $R$  eine Familie von Untermengen aus  $X$  ist, die durch den Schnitt von Punkten aus  $X$  mit geschlossenen Flächen in der Ebene entstehen. Die Elemente aus  $R$  werden hierbei als *Ranges*,  $(X, R)$  als *Range-Space* bezeichnet.

### 2.1 Kreisscheiben

Das *Größenverhältnis* einer Menge  $S$  von Kreisscheiben ist das Verhältnis des kleinsten Radius zum größten Radius der Scheiben in  $S$ . Mit  $S^i$ ,  $i > 0$  wird die Untermenge der Scheiben aus  $i$  bezeichnet, deren Radius in  $[2^{i-1}, 2^i)$  liegt.

$\phi_{2^i}(S^i)$  ist das Maximum der Anzahl von Kreisscheiben aus  $S^i$ , deren Mittelpunkt in einem Quadrat mit Seitenlänge  $2^i$  liegen.

Für eine Menge  $X$  aus  $\mathbb{R}^2$  und einen gegebenen Radius  $r$  bezeichnet  $S_r$  die Menge aller Kreisscheiben mit Radius  $r$  und Mittelpunkten aus  $X$ .

Die Hauptergebnisse die Färbung von Kreisscheiben betreffend finden sich in folgendem

**Theorem 1.2:**

1. Sei  $S$  eine endliche Menge von Kreisscheiben mit Größenverhältnis  $\rho$ . Dann gibt es einen Polynomialzeitalgorithmus, der eine CF-Färbung von  $S$  mit  $O(\min\{\sum_{i=1}^{\log(\rho)+1} (1 + \log\phi_{2^i}(S^i)), \log|S|\}) = O(\min\{\log(\rho) \cdot \max_i\{\log\phi_{2^i}(S^i)\}, \log|S|\})$  Farben liefert.
2. Sei  $X$  eine Menge von Mittelpunkten aus  $\mathbb{R}^2$ . Dann gibt es einen Polynomialzeitalgorithmus, der eine Färbung  $\chi$  von  $X$  mit  $O(\log|X|)$  liefert, sodass eine Färbung von  $S_r(X)$ , bei der jeder Kreisscheibe die Farbe ihres Mittelpunktes zugeordnet wird, eine gültige CF-Färbung von  $S_r(X)$  für jeden Radius darstellt.

Im ersten Teil von Theorem 1.2 müssen die Scheiben nicht unbedingt kongruent sein. Im zweiten Teil des Theorems jedoch sind die Scheiben kongruent, der Radius muss aber nicht vorher bekannt sein. Das heißt, die Färbung paßt für jeden Radius. Eine solche *uniforme Färbung* modelliert daher eine Frequenzverteilung in einem Netzwerk, bei dem die Basisstationen die gleiche Sendestärke haben, die Clients sich aber in ihrer Empfangsreichweite unterscheiden können.

Auf Theorem 1.2 aufbauend, erhält man zwei abgeschwächte CF-Färbungsalgorithmen für Scheiben mit dem selben (Einheits-) Radius, die sehr wenige Farben benutzen. Dies geschieht im ersten Fall auf Kosten einer kleinen Fläche, die nicht abgedeckt wird. Im zweiten Fall haben die Scheiben einen leicht vergrößerten Radius.

**Theorem 1.3** Für jedes  $0 < \epsilon < 1$  und jede endliche Menge von Mittelpunkten  $X \subset \mathbb{R}^2$  existiert ein Polynomialzeitalgorithmus der Färbungen wie folgt berechnet:

1. Eine Färbung  $\chi$  von  $S_1(X)$  mit  $O(\log\frac{1}{\epsilon})$  Farben, für die gilt:  
Die Fläche aus der Menge  $S_1(X)$ , für die  $\chi$  keine gültige CF-Färbung ist, ist höchstens ein  $\epsilon$  Teil der gesamten Fläche von  $S_1(X)$ .
2. Eine Färbung von  $S_{1+\epsilon}(X)$  mit  $O(\log\frac{1}{\epsilon})$  Farben, die für jeden Punkt in  $\bigcup S_1(X)$  eine gültige CF-Färbung darstellt.

**2.2 Rechtecke und regelmäßige Sechsecke**

Sei  $R$  diesmal eine Menge achsenparalleler Rechtecke. Zu einem Rechteck  $R$   $\epsilon R$  beschreibt  $w(R)$  bzw.  $h(R)$  dessen Länge bzw. Höhe. Das Größenverhältnis von  $R$  wird durch  $\max\{\frac{w(r1)}{w(r2)}, \frac{h(r1)}{h(r2)}\}$  definiert. Bei Sechsecken ist das Größenverhältnis durch das Verhältnis der längsten zur kürzesten Seite gegeben.

**Theorem 1.4** Sei  $R$  eine Menge achsenparalleler Rechtecke oder achsenparalleler, regelmäßiger Sechsecke. Sei  $\rho$  das Größenverhältnis und  $\chi_{\text{opt}}(R)$  eine optimale Färbung von  $R$ .

1. Ist  $R$  eine Menge von Rechtecken, so existiert ein Polynomialzeitalgorithmus, der eine CF-Färbung  $\chi$  von  $R$  berechnet, sodass  $|\chi(R)| = O((\log\rho)^2) \cdot |\chi_{\text{opt}}(R)|$ .

2. Ist  $R$  eine Menge regelmäßiger Sechsecke, so existiert ein Polynomialzeitalgorithmus, der eine CF-Färbung  $\chi$  von  $R$  liefert, sodass  $|\chi(R)| = O(\log \rho) \cdot |\chi_{\text{opt}}(R)|$ .

Für konstante Größenverhältnisse existiert also ein Algorithmus, der ein konstant gutes Näherungsergebnis liefert.

### 2.3 Kongruente, punktsymmetrische Flächen

Gegeben sei eine konvexe Fläche  $C$  und ein Punkt  $O$ . Eine *Skalierung* mit Faktor  $r > 0$  ist eine Abbildung, die jeden Punkt  $P \neq O$  auf den Punkt  $P'$  auf dem Strahl von  $O$  nach  $P$  abbildet, sodass  $|P'O| = r \cdot |PO|$ . Das Bild von  $C$ , das durch eine solche Skalierung entsteht, wird mit  $C_{r,O}$  bezeichnet. Mit  $C_{r,O}(x)$  wird die Verschiebung von  $C_{r,O}$  bezeichnet, die den Punkt  $O$  auf den Punkt  $x$  abbildet.  $C'$  ist eine *skalierte Verschiebung* von  $C$ , falls Punkte  $O, x$  und ein Faktor  $r > 0$  existieren, sodass  $C' = C_{r,O}(x)$ . Ist  $X$  eine Menge von Punkten, so bezeichnet  $C_{r,O}(X)$  die Menge aller skalierten Verschiebungen  $\{C_{r,O}(x) \mid x \in X\}$ .

Das folgende Theorem verallgemeinert nun den zweiten Teil von Theorem 1.2 auf alle punktsymmetrischen, konvexen Flächen, die kongruent in Bezug auf Verschiebungen sind.

**Theorem 1.5** Sei  $C$  eine punktsymmetrische, konvexe Fläche mit Mittelpunkt  $O$ ,  $X \subset \mathbb{R}^2$  eine endliche Menge von Punkten, dann existiert eine Färbung  $\chi$  von  $X$  mit  $O(\log|X|)$  Farben, die gültig für  $C_{r,O}(X)$  für jedes  $r > 0$  ist, wenn jedes  $c \in C_{r,O}(X)$  mit der Farbe des entsprechenden Mittelpunktes gefärbt wird.

### 2.4 Ein äquivalentes Problem: CF-Färbung von Punkten in Bezug auf Flächen

Zum Beweis von Theorem 1.2 wird später folgendes Problem, das äquivalent zum Problem aus Definition 1.1 ist, betrachtet:

**Definition 1.6** Sei  $(X, R)$  ein range-space. Eine Funktion  $\chi : X \rightarrow \mathbb{N}$  ist eine CF-Färbung von  $X$  in Bezug auf  $R$ , wenn für jedes  $R \in R$  eine Farbe  $i \in \mathbb{N}$  existiert, sodass die Menge  $\{x \in R : \chi(x) = i\}$  genau einen Punkt enthält.

Hier werden also im Gegensatz zur ursprünglichen CF-Färbung nicht die Flächen, sondern die Punkte gefärbt.

Auch dies kann, unter bestimmten Bedingungen, mit  $O(\log|X|)$  Farben geschehen:

**Theorem 1.7** Sei  $C$  eine kompakte, konvexe Fläche,  $X$  eine endliche Menge von Punkten in der Ebene. Durch  $R \subseteq 2^X$  sei die Menge der *ranges* bestimmt, die man durch Schnitt von  $X$  mit allen skalierten Verschiebungen von  $C$  erhält. Dann existiert eine CF-Färbung von  $X$  in Bezug auf  $R$  mit  $O(\log|X|)$  Farben.

## 3 Beweisführung

### 3.1 Begriffserklärungen

#### 3.1.1 Kombinatorische Anordnung

Auf einer endlichen Menge  $R$  von Gebieten in der Ebene wird folgende Äquivalenzrelation definiert. Zwei Punkte  $x$  und  $y$  gehören zur selben Äquivalenzklasse, wenn sie in genau den selben Untermengen in  $R$  enthalten sind. Das heißt,  $x$  und  $y$  sind äquivalent, genau wenn  $\{R \in R : x \in R\} = \{R \in R : y \in R\}$ . Solch eine Äquivalenzklasse wird im Folgenden als Zelle, die Menge aller Zellen von  $R$  mit  $cells(R)$  bezeichnet. Auch das Paar  $(cells(R), R)$  bezeichnen wir als *range-space*, wobei die Grundmenge hier aus einem Vertreter je Zelle und die ranges aus den Schnitten der Mengen in  $R$  mit der Grundmenge bestehen. Dieser range-space wird als *kombinatorische Anordnung* bezeichnet.

#### 3.1.2 Dualer Range-Space

Zu einem Range-Space  $(X, R)$  ist das duale Mengensystem definiert durch  $(R, X^*)$ , wobei  $X^* = \{N(x)\}_{x \in X} \subseteq 2^R$  und  $N(x) = \{R \in R : x \in R\}$ . Mit  $\tau$  wird eine Menge von Gebieten bezeichnet, die alle eine gemeinsame Eigenschaft haben, wie beispielsweise die Menge aller Kreisscheiben mit Radius 1.

$(X, R)$  ist nun ein  $\tau$ -Range-Space, wenn  $R \subseteq \tau$  gilt.

**Definition 2.1** Eine Menge von Gebieten  $\tau$  ist *selbstdual*, wenn der duale Range-Space zu jedem  $\tau$ -Range-Space isomorph zu einem  $\tau$ -Range-Space ist.

Die folgende Behauptung, die im Originaltext bewiesen wurde, gibt eine hinreichende Bedingung für Selbstdualität.

**Behauptung 2.2** Sei  $C$  ein geschlossenes, punktsymmetrisches Gebiet in der Ebene und  $\tau$  die Menge aller zu  $C$  durch Verschiebung kongruenten Gebiete. Dann ist  $\tau$  selbstdual.

Aus dieser Behauptung folgt Korollar 2.3, auf das die Beweise zum 2. Teil von Theorem 1.2 und zum Theorem 1.5 aufbauen.

**Korollar 2.3** Sei  $C$  ein geschlossenes, punktsymmetrisches Gebiet in der Ebene und  $\tau$  die Menge aller zu  $C$  verschiebungskongruenten Regionen. Dann ist die CF-Färbung von  $\tau$ -Gebieten äquivalent zur CF-Färbung von Punkten in Bezug auf  $\tau$ -Ranges.

## 4 Beweisführung

### 4.1 Ein allgemeiner Algorithmus

Im folgenden wird ein Algorithmus zur Färbung angegeben und diskutiert, unter welchen Bedingungen dieser mit  $O(\log n)$  Farben auskommt.

**Definition 3.1** Sei  $X$  eine Menge von Punkten und  $R \subseteq 2^X$  eine Menge von *Ranges*. Eine Partition  $(X_1, X_2)$  ist  $R$ -nützlich, wenn  $X_1 \neq \emptyset$  und  $\forall S \in R : |S \cap X_1| = 1$  oder  $|S \cap X_2| \neq 0$ .

**Algorithmus 1: CF-Färbung einer Menge  $X$  in Bezug auf eine Menge von Ranges**

**R 1: Initialisierung:**  $i \leftarrow 1, X^1 \leftarrow X, R^1 \leftarrow R$  ( $i$  ist eine unbenutzte Farbe,  $X^i$  die Menge von noch nicht gefärbten Punkten und  $R^i$  die Menge von Ranges, die mehr als einen Punkt in  $X^i$  enthalten und noch nicht durch Punkte der Farbe  $i$  zufriedenstellend gefärbt sind.)

2: **while**  $X^i \neq \emptyset$  **do**

3: **Finde eine  $R^i$ -nützliche Partition  $(X_1, X_2)$  von  $X^i$**

4: **Färbe:**  $\forall x \in X_1 : \chi(x) \leftarrow i$ .

5: **Bilde ab:**  $X^{i+1} \leftarrow X_2$  und  $R^{i+1} \leftarrow \{S \cap X_2 : S \in R^i, |S \cap X_1| \neq 1, \text{ und } |S \cap X_2| \geq 2\}$ .

6: **Nächste Farbe:**  $i \leftarrow i+1$

7: **end while** Auf den Beweis, dass Algorithmus 1 eine CF-Färbung liefert, wird hier verzichtet.

**4.2 Bedingungen für  $O(\log|X|)$  Farben**

Algorithmus 1 benutzt  $O(\log|X|)$  Farben, falls in jeder Iteration ein konstanter Bruchteil von  $|X^i|$  eingefärbt wird. Um Bedingungen hierfür zu zeigen, betrachten wir folgenden Graphen:

**Definition 3.3** Ein Delaunay Graph eines Mengensystems  $(X, R)$  ist ein Graph  $DGR(X, R)$ , der wie folgt gebildet wird: Für jedes minimal  $S \in R$  wähle ein Paar  $u, v \in S$  und definiere  $e(S) = (u, v)$ . Die Kantenmenge  $E$  ist gegeben durch  $E = \{e(S) : S \in R \text{ und } S \text{ ist minimal}\}$ .

Nach Behauptung 3.4 kann nun mit jeder unabhängigen Menge  $X_1 \subseteq X$  eine  $R$ -nützliche Partition der Form  $(X_1, X \setminus X_1)$  gebildet werden. Man sieht, dass die Färbung  $O(\log|X|)$  Farben benutzt, wenn der Delaunay Graph in jeder Iteration eine unabhängige Menge der Größe  $\Omega(\log n)$  beinhaltet. Da planare Graphen mit 4 Farben gefärbt werden können, besitzen sie eine unabhängige Menge der Größe mindestens  $|X^i|/4$ . Wir zeigen nun, dass Delaunay Graphen von skalierten Verschiebungen eines konvexen Gebietes planar sind.

**4.2.1 Kreisscheiben in der Ebene**

Da der Delaunay Graph im Fall von Kreisscheiben dem Standard Delaunay Graphen entspricht, ist er planar.

**4.2.2 Skalierte Verschiebungen konvexer Gebiete in der Ebene**

Zu Beginn werden noch einige Begriffe definiert: Für ein geschlossenes Gebiet sei  $\delta C$  der Rand und  $\overset{\circ}{C}$  das Innere von  $C$ . Wir schreiben  $C' \sim C$ , wenn  $C'$  eine skalierte Verschiebung von  $C$  ist. Für eine homomorphe Abbildung  $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  und eine Menge  $S \subset \mathbb{R}^2$  bezeichnet  $\tau(S)$  das Bild der Menge  $S$  unter  $\tau$ .

**Definition 3.10** Eine Range  $S \in R$  wird von einem Gebiet  $C$  induziert, wenn  $S = C \cap X$ . Eine Range  $S \in R$  ist *rand-induziert*, wenn  $S = \delta C \cap X$  und  $\overset{\circ}{C} \cap X = \emptyset$ .

Sei  $C$  ein kompaktes, konvexes Gebiet in der Ebene und  $X \subset \mathbb{R}^2$  eine endliche Menge von Punkten. Sei  $(X, R)$  der Range-Space, der durch alle skalierten Verschiebungen von  $C$  definiert ist. Im Folgenden wird gezeigt, dass der Delaunay-Graph zu  $(X, R)$  planar ist.

**Behauptung 3.11** Jede minimale Range  $S \in R$  ist rand-induziert durch eine Region  $C' \sim C$ .

*Beweis:* Da  $S$  eine Range ist, existiert ein  $C_S$  mit  $X \cap C_S = S$ . Wenn nötig, verkleinern wir  $C_S$  soweit, dass der Rand von  $C_S$  einen Punkt von  $S$  enthält. Das Innere von  $C_S$  beinhaltet nun maximal einen Punkt von  $S$ . Sonst erhalten wir durch eine unendlich kleine Verkleinerung eine Range  $S' \subsetneq S$ , was der Minimalität von  $S$  widerspricht. Sei  $y$  nun ein solcher Punkt und  $x$  ein Punkt auf dem Rand von  $C_S$ . Mit  $C'$  wird nun ein Gebiet angegeben, dass  $C_S$  rand-induziert. Dabei wird  $C'$  durch die Skalierung  $\tau$  aus  $C$  erhalten. Sei  $y'$  nun der Schnittpunkt des Randes von  $C_S$  mit dem Strahl von  $x$  durch  $y$ .  $x$  sei der Ursprung der Skalierung und  $|xy|/|xy'|$  das Skalierungsverhältnis. Nach Definition von  $\tau$  liegen nun  $x$  und  $y'$  auf dem Rand von  $C'$ . Da  $S$  minimal ist, folgt  $C' \cap X = S$ . Weil  $C$  konvex ist, folgt  $C' \subseteq C_S$ . Wenn ein Punkt  $z$  im Inneren von  $C'$  liegt, liegt er auch im Inneren von  $C_S$  und damit  $z = y$ , was aber nach Definition von  $\tau$  nicht möglich ist. Es folgt, dass jeder Punkt aus  $S$  auf dem Rand von  $C'$  liegt.  $\square$

Wir zeigen nun, dass es für diese Fälle Delaunay Graphen  $DG_R = (X, E)$  gibt, deren Kanten sich nicht kreuzen und die somit planar sind.

Seien  $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in E$ . Für  $i=0,1$  seien  $x_i, y_i \in S_i$  für eine minimale Range  $S_i \in R$ , wobei  $S_0 \neq S_1$ . Seien  $C_i \sim C$  skalierte Verschiebungen von  $C$ , die  $S_i$  rand-induzieren. Wenn  $C_0 \cap C_1 = \emptyset$  schneiden sich die Kanten  $x_0y_0$  und  $x_1y_1$  nicht. Wenn  $C_0 \cap C_1 \neq \emptyset$ , schneiden sich die Ränder  $\delta C_0$  und  $\delta C_1$ . Wir betrachten nun den Fall, dass keine drei Punkte auf  $\delta C$  kollinear sind. Daraus folgt, dass  $\delta C_0 \cap \delta C_1$  höchstens zwei Punkte enthält. Wenn  $\delta C_0 \cap \delta C_1$  nun genau einen Punkt  $p$  enthält, kann man die konvexen Gebiete  $C_0$  und  $C_1$  mit einer Geraden durch  $p$  trennen. Diese Trennlinie zeigt, dass sich die Kanten  $x_0, y_0$  und  $x_1, y_1$  nicht schneiden können.

Wenn  $\delta C_0 \cap \delta C_1$  zwei Punkte  $p, q$  enthält, wird der Rand von  $C_i$  in zwei Linien geteilt, die jeweils durch die Punkte  $p$  und  $q$  begrenzt sind. Die Linie  $\gamma_i$  ist aus  $\delta C_i \setminus \overset{\circ}{C}_{1-i}$ , die Linie  $\gamma'_i$  aus  $\delta C_i \cap C_{1-i}$ . Da das Innere von  $\overset{\circ}{X}_{1-i}$  keine Punkte von  $X$  beinhaltet, sind  $x_i$  und  $y_i$  aus  $\gamma_i$ .

Um zu zeigen, dass sich  $x_0y_0$  und  $x_1y_1$  nicht kreuzen, reicht es zu zeigen, dass die Linie  $pq \setminus \{p, q\}$  von  $\gamma_0 \setminus \{p, q\}$  und  $\gamma_1 \setminus \{p, q\}$  getrennt ist. (Wenn sich zwei Kanten schneiden, teilen sie sich einen *inneren* Punkt, der ja nicht  $p$  oder  $q$  sein kann.) Um einen Widerspruch zu zeigen, nehmen wir an,  $\gamma_0 \setminus \{p, q\}$  und  $\gamma_1 \setminus \{p, q\}$  auf der selben Seite von  $pq$  liegen. Diese Linien haben keinen gemeinsamen Punkt. Mit der Linie  $pq$  müsste nun eine Fläche die andere beinhalten, was ihrer Definition widerspricht.

Der Fall, dass  $\delta C_0 \cap \delta C_1$  mehr als zwei Punkte (und damit eine Linie) enthält, wird ähnlich behandelt. Man kann leicht zeigen, dass  $\delta C_0 \cap \delta C_1$  in einem solchen Fall höchstens zwei

zusammenhängene Komponenten (Linien oder einzelne Punkte) beinhaltet. Dann wählt man  $p$  als irgendeinen Punkt der einen,  $q$  als einen Punkt der anderen Komponente und wendet die selben Argumente wie oben an.  $\square$