

Übungen zur Vorlesung  
**Algorithmische Spieltheorie**

WS 2007/08

Blatt 1

**Aufgabe 1** (5 Punkte):

Ein Nash-Gleichgewicht ist ein Paar von gemischten Strategien  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ , so dass diese wechselseitige beste Antworten sind, d. h.,  $\mathbf{y} \in \beta(\mathbf{x})$  und  $\mathbf{x} \in \beta(\mathbf{y})$ .

Zeige: Ist ein Spiel per iterativer Dominanz lösbar, so besitzt es ein eindeutiges Nash-Gleichgewicht.

*In den beiden folgenden Aufgaben betrachten wir Spiele mit  $m > 2$  Spielern. Wir müssen unsere Notation dann ein wenig erweitern: Sei  $S_l$  der Strategieraum von Spieler  $l$ , und sei  $\Delta(S_l)$  die entsprechende Menge von gemischten Strategien. Für eine Auswahl von (gemischten oder reinen) Strategien  $\mathbf{x}_l \in \Delta(S_l)$ ,  $l \in [m]$ , bezeichnen wir  $s = (\mathbf{x}_l)_{l \in [m]}$  als gemeinsames Strategieprofil der Spieler. Unsere Auszahlungsfunktion wird nun nicht mehr durch eine Matrix beschrieben, sondern durch  $m$  Funktionen  $u_1, \dots, u_m$ . Dabei ist  $u_l(s)$  die Auszahlung an Spieler  $l$  bei Strategieprofil  $s$ . Diese ist zunächst definiert für Strategieprofile mit reinen Strategien und erweitert sich auf gemischte Strategien durch Bildung des Erwartungswertes:*

$$u_l(s) = \sum_{(j_1, \dots, j_m) \in S_1 \times \dots \times S_m} u_l(j_1, \dots, j_m) \cdot \prod_{k \in [m]} x_{k, j_k}.$$

*Das Produkt ist dabei die Wahrscheinlichkeit, dass durch die gemischten Strategien  $\mathbf{x}_1 \dots, \mathbf{x}_m$  das reine Strategieprofil  $(j_1, \dots, j_m)$  realisiert wird. Für ein festes Strategieprofil  $s$  schreiben wir außerdem  $(s_{-l}, \mathbf{x}_l)$  für dasjenige Strategieprofil, das aus  $s$  hervorgeht, indem wir die Strategie von Spieler  $l$  durch  $\mathbf{x}_l$  dersetzen.*

**Aufgabe 2** (5 Punkte):

Wir zeigen, dass im Allgemeinen Iterative Dominanz und Rationalisierbarkeit nicht äquivalent sind, wie für Zweipersonenspiele gezeigt. Dazu betrachten wir folgendes Spiel mit drei Spielern: Spieler 1 wählt eine Zeile, Spieler 2 wählt eine Spalte und Spieler 3 wählt eine Matrix. In der entsprechenden Zelle steht nun die Auszahlung für Spieler 3. Die Spieler kennen wiederum nicht die Wahl der anderen.

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Zeige: Die Strategie von Spieler 3, die Matrix ganz rechts auszuwählen, ist nicht dominiert, aber auch keine beste Antwort auf eine gemischte Strategie der Spieler 1 und 2.

**Aufgabe 3** (5 Punkte):

Das Prinzip der iterativen Dominanz lässt sich vollkommen analog für Spiele mit  $m$  Spielern definieren. Zunächst sei für alle  $l \in [m]$   $S_l^0 = S_l$ . Für  $k \geq 0$  sei

$$S_l^k = \{i \in S_l^{k-1} \mid \neg \exists \mathbf{x} \in \Delta(S_{l-1}^k) : u_l(s_{-l}, i) > u_l(s_{-l}, i) \forall s \in S_1^k \times \dots \times S_m^k\}$$

und  $S_l^\infty = \bigcap_{k=0}^\infty S_l^k$ .

Wir betrachten nun eine alternative Definition, bei der nicht in jeder Iteration die dominierten Strategien *aller* Spieler gelöscht werden, sondern nur die *eines Teils* der Spieler, z.B. in jeder Iteration nur die dominierten Strategien eines einzelnen Spielers. Sei dazu  $(I_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \{1, \dots, m\}$  eine Folge von Teilmengen der Spieler, wobei jedes  $l \in 1, \dots, m$  unendlich oft auftritt.

Definiere nun

$$T_l^k = \begin{cases} \text{wie } S_l^k \text{ oben} & \text{falls } l \in I_k \\ T_l^{k-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

Das heißt im Schritt  $k$  werden nun noch die dominierten Strategien der Spieler aus  $I_k$  gelöscht.

Zeige:  $\bigcap_{k=0}^\infty T_l^k = S_l^\infty$ .

*Hinweis: Zeige, dass auch bei diesem Vorgehen jede dominierte Strategie entfernt wird.*