Simon Fischer, Berthold Vöcking
Thomas Keßelheim

Aachen, den 07. Januar 2008
Abgabe 14. Januar 2008 in der Vorlesung

Übungen zur Vorlesung
Algorithmische Spieltheorie
WS 2007/08
Blatt 5

Zur Erinnerung: Die übrigen Termine für die Übungen sind wie folgt:

	Ausgabe	Abgabe	Besprechung
Übungsblatt 5	07.01.2008	14.01.2008	17.01.2008
Übungsblatt 6	21.01.2008	28.01.2008	07.02.2008

Aufgabe 1 (5 Punkte)**:**
Sei G eine Instanz des Lastverteilungsspiels mit drei Tasks, die auf zwei identische Maschinen verteilt werden sollen. Zeige, dass für jedes reine Nash-Gleichgewicht A gilt: $cost(A) = opt(G)$.

Aufgabe 2 (7 Punkte)**:**
Zeige, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ eine Instanz G des Lastverteilungsspiels mit m identischen Maschinen und $2m$ Tasks existiert, das ein Nash-Gleichgewicht A hat mit

$$cost(A) = \left(2 - \frac{2}{m+1}\right) \cdot opt(G)$$

Hinweis: Verallgemeinere das Beispiel mit $m = 2$ aus der Vorlesung.

Aufgabe 3 (7 Punkte)**:**
In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass der *Price of Anarchy* für reine Gleichgewichte in Lastverteilungsspielen mit zwei Tasks auf zwei Maschinen (mit ggf. unterschiedlicher Geschwindigkeit) genau dem Goldenen Schnitt $\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ entspricht.

a) Finde zunächst eine Instanz G mit einem Nash-Gleichgewicht A und der Eigenschaft $cost(A) = \phi \cdot opt(G)$.

b) Zeige, dass für jede Instanz G und jedes Nash-Gleichgewicht A gilt: $cost(A) \leq \phi \cdot opt(G)$.

   Hinweis: Betrachte alle vier möglichen Zuteilungen der zwei Jobs auf die zwei Maschinen. Welche Kombinationen sind möglich, in denen ein Nash-Gleichgewicht erreicht wird, das keine optimale Lösung ist?

   Zudem macht es die Rechnung einfacher, o. B. d. A. anzunehmen, dass $s_2 = 1$, $w_2 = 1$ sowie $s_1 \geq s_2$, $w_1 \geq w_2$ gelten.