Simon Fischer, Berthold Vöcking
Thomas Keßelheim

Aachen, den 21. Januar 2008
Abgabe 28. Januar in der Vorlesung

Übungen zur Vorlesung
Algorithmische Spieltheorie
WS 2007/08
Blatt 6

Aufgabe 1 (5 Punkte)**:**
Wir betrachten Procurement-Auktionen auf Graphen.

1. Es sollen Pfade versteigert werden. Sei P_1 der billigste Pfad und P_2 der billigste zu P_1 kantendisjunkte Pfad. Sei k die Länge von P_1. Zeige: Es gibt Graphen sowie Valuierungen der Spieler, so dass der VCG-Algorithmus ein Payment von $\Omega(k) \cdot cost(P_2)$ bezahlt.

2. Nun sollen Spannbäume versteigert werden. Zeige: Die vom VCG-Mechanismus berechneten Payments sind höchstens $cost(T_2)$, wobei T_2 der billigste zum billigsten Spannbaum T_1 kantendisjunkte Spannbaum ist.

   Hinweis: Sei A eine Kantenmenge, die in einem minimalen Spannbaum enthalten ist. Sei e eine minimale Kante, die einen beliebigen Schnitt kreuzt, der nicht von Kanten aus A gekreuzt wird. Dann gibt es einen minimalen Spannbaum, der $A \cup \{e\}$ enthält.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**:**
Wir analysieren einen verbesserten Approximationsalgorithmus für das Rucksackproblem.
Für eine Teilmenge Q der Objekte sagen wir, dass die Objekte in „Q-Reihenfolge“ betrachtet werden, wenn zunächst die Objekte aus Q und dann die anderen Objekte betrachtet werden, jeweils in Reihenfolge nicht fallender Effizienz.
Algorithmus Greedy(Q) beginnt mit einer leeren Rucksackbepackung, betrachtet dann die Objekte in Q-Reihenfolge und fügt dabei ein Objekt zur Rucksackbepackung hinzu, wenn es zusammen mit den schon hinzugefügten Objekten nicht die Kapazitätsschranke b überschreitet.
Algorithmus q-Greedy ruft nun Greedy(Q) für jede Teilmenge von q Objekten aus und gibt die nutzenmaximale Rucksackbepackung über alle Aufrufe aus.

1. Welche Laufzeitschranke gilt für q-Greedy?

2. Zeige, dass Algortihmus q-Greedy monoton ist.

3. Zeige, dass q-Greedy einen Approximationsfaktor $1 - \frac{1}{q+1}$ erreicht.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**:**
Wie berechnen sich die „Critical Value“-Preise in dem in der Vorlesung beschriebenen Algorithmus für Combinatorial Auctions?