
Simon Fischer
**Einführung in die
Spieltheorie**
Vorlesungsskript

**Informatik 1
RWTH Aachen**

© Copyright 2005 Simon Fischer
Anmerkungen und Korrekturen bitte an
fischer@cs.rwth-aachen.de

Inhaltsverzeichnis

1	Zweipersonen-Nullsummenspiele	4
1.1	Normalform	6
1.2	Extensive Form	7
1.2.1	Spiele mit vollständiger Information	9
1.2.2	Spiele mit unvollständiger Information	9
2	Allgemeine Zweipersonenspiele	12
2.1	Existenz von Nash-Gleichgewichten	14
2.2	Der Lemke-Howson Algorithmus	18
2.2.1	Formulierung als LCP	19
2.2.2	Geometrische Beschreibung des Algorithmus	20
2.2.3	Algebraische Formulierung	21
2.2.4	Der Pivotschritt	22

Kapitel 1

Zweipersonen- Nullsummenspiele

Wir betrachten ein Spiel, an dem zwei Personen beteiligt sind. Beide Spieler haben eine Menge von *Strategien* oder *Aktionen*, aus denen sie eine auswählen können. Wir bezeichnen die Menge der Strategien von Spieler 1 mit $[m] = \{1, \dots, m\}$ und die Strategien von Spieler 2 mit $[n] = \{1, \dots, n\}$. Der Ausgang des Spiels hängt ab von den beiden ausgewählten Strategien $i \in [m]$ und $j \in [n]$ und wird beschrieben durch eine $m \times n$ -Auszahlungsmatrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Der Eintrag a_{ij} bedeutet: „Wählt Spieler 1 Strategie i und Spieler 2 Strategie j , muss Spieler 2 an Spieler 1 den Betrag a_{ij} zahlen“. Eine Auswahl von Strategien für Spieler 1 und 2 schreiben wir als Paar (i, j) . Da keine Zahlung in das Spiel hinein oder aus dem Spiel heraus fließt, sondern nur Zahlungen zwischen den Spielern fließen, heißen diese Art von Spielen Nullsummenspiele. Spieler 1 möchte diesen Wert also maximieren, Spieler 2 möchte den Wert minimieren. Entsprechend bezeichnen wir die beiden Spieler auch als *Maximierungsspieler* und *Minimierungsspieler*. Da Spieler 1 mit der Auswahl seiner Strategie eine Zeile der Matrix auswählt, bezeichnen wir diesen auch als *Zeilenspieler* und Spieler 2 entsprechend als *Spaltenspieler*. Wie sollten sich die beiden Spieler nun verhalten?

Betrachten wir das folgende Spiel:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \\ 3 & 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

Spieler 1 könnte hier verführt sein, Zeile 3 der Matrix auszuwählen, da diese die größten Auszahlungen ermöglicht. Dies bringt ihm jedoch keinen Vorteil, da der Spaltenspieler dann Spalte 1 auswählen würde und die Auszahlung an Spieler 1 wäre nur 3.

Offenbar ist hier nur das Strategienpaar $(2, 1)$ optimal für beide Spieler, da sich dann kein Spieler durch Änderung seiner Strategie verbessern kann.

Der Eintrag $a_{2,1}$ ist ein *Sattelpunkt* der Matrix. Er ist gleichzeitig das Minimum seiner Zeile und das Maximum seiner Spalte. Durch Auswahl von Zeile 2 kann sich der Maximierungsspieler eine Auszahlung von 4 sichern während der Minimierungsspieler durch Auswahl von Spalte 1 die Auszahlung auf 4 begrenzen kann. In diesem Fall können wir die Matrix also auf einfache Weise durchsuchen und erhalten mit dem Sattelpunkt ein einfaches Lösungskonzept für Zweipersonen Nullsummenspiele (unter der Voraussetzung, dass Spieler 2 überhaupt bereit ist, an dem Spiel teilzunehmen).

Was aber, wenn es einen solchen Sattelpunkt nicht gibt? Betrachten wir das Kinderspiel Papier-Schere-Stein, das durch folgende Matrix beschrieben werden kann:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es ist leicht zu erkennen, dass diese Matrix keinen Sattelpunkt besitzt. Für jede Strategie, die Spieler 1 wählt, gibt es eine eindeutige optimale Strategie für Spieler 2, eine so genannte *beste Antwort*. Hierauf kann wiederum Spieler 1 eine beste Antwort wählen, die eine andere als seine ursprüngliche Strategie ist. Dies kann immer weiter fortgesetzt werden. Das Lösungskonzept des Sattelpunkts ist also nicht für alle Zweipersonen-Nullsummenspiele geeignet.

Was wäre stattdessen ein natürliches Verhalten für das obige Spiel? Offenbar gibt es kein sinnvolles Verhalten, wenn die Spieler zur Wahl einer festen Strategie gezwungen sind. Stattdessen sollten wir ihnen erlauben, ihre Strategien randomisiert zu wählen. Wir sprechen dann von *gemischten Strategien*, die Wahrscheinlichkeitsverteilungen über den Strategieräumen $[m]$ bzw. $[n]$ sind. Wir beschreiben diese Wahrscheinlichkeitsverteilungen durch Vektoren $\mathbf{x} \in \Delta^m$ bzw. $\mathbf{y} \in \Delta^n$. Hierbei ist Δ^d der d -dimensionale Simplex $\Delta^d := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^d \mid \sum_{i \in [d]} x_i = 1\}$. (Das Wort Simplex hat dabei nichts mit dem Simplex-Algorithmus zu tun.) Dabei bezeichnet x_i (bzw. y_j) die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler 1 (Spieler 2) die reine Strategie i (Strategie j) spielt. Die Auszahlungen der Spieler verallgemeinern sich dann auf natürliche Art durch die Bildung des Erwartungswerts. Bei einer fest gewählten gemischten Strategie \mathbf{y} von Spieler 2 ist die i -te Komponente des Vektors $\mathbf{A}\mathbf{y}$ die erwartete Auszahlung, wenn Spieler 1 die reine Strategie i spielt und der Skalar $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{y}$ ist die erwartete Auszahlung für Spieler 1 bei fest gewählten gemischten Strategien \mathbf{x} und \mathbf{y} . Mit dem Einheitsvektor \mathbf{e}_i bezeichnen wir die gemischte Strategie, die die reine Strategie i mit Wahrscheinlichkeit 1 wählt. Die Dimension von \mathbf{e}_i ergibt sich aus dem Zusammenhang.

Kehren wir zurück zum Papier-Schere-Stein-Spiel und betrachten wir die Strategien $\mathbf{x} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ und $\mathbf{y} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Es ist leicht zu überprüfen, dass hier für die erwartete Auszahlung gilt $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{y} = 0$. Es ist ebenfalls leicht zu sehen, dass eine Abweichung eines der Spieler von seiner Strategie dem

anderen Spieler eine Verbesserung ermöglicht. Damit haben wir dieses sehr einfache Spiel mit gemischten Strategien gelöst.

Als Lösungskonzept für Nullsummenspiele definieren wir also ein Paar von einer Maximin- und einer Minimax-Strategie entsprechend der folgenden Definition.

Definition 1 (Maximin- / Minimax-Strategie). Eine Strategie $\mathbf{x}^* \in \Delta^m$ bzw. $\mathbf{y}^* \in \Delta^n$ heißt Maximin-Strategie bzw. Minimax-Strategie, wenn

$$\mathbf{x}^* \in \arg \max_{\mathbf{x} \in \Delta^m} \min_{j \in [n]} (\mathbf{A}^\top \mathbf{x})_j$$

bzw.

$$\mathbf{y}^* \in \arg \min_{\mathbf{y} \in \Delta^n} \max_{i \in [m]} (\mathbf{A} \mathbf{y})_i.$$

Ein Paar von Maximin- und Minimax-Strategien bezeichnen wir als Minimax-Gleichgewicht.

Im folgenden Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Berechnung solcher Strategien.

1.1 Normalform

Betrachte ein Zweipersonen-Nullsummenspiel in Normalform, gegeben durch die $m \times n$ -Auszahlungsmatrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Dabei ist die Auszahlung von Spieler 2 gegeben durch $-\mathbf{A}$. Wie können wir nun ein Paar von Maximin- und Minimax-Strategien berechnen?

Offenbar ändert die Addition einer Konstanten zu jedem Eintrag in \mathbf{A} nicht die Gleichgewichtspunkte des Spiels. Wir können daher o. B. d. A. davon ausgehen, dass alle Einträge in der Matrix positiv sind.

Betrachten wir zunächst das Spiel aus der Sicht des Maximierungsspielers. Dieser möchte unabhängig von der Strategie des Gegenspielers seine *garantierte Auszahlung*, die wir mit v bezeichnen, maximieren. Er sucht also eine gemischte Strategie \mathbf{x} , so dass für jede (reine) gegnerische Strategie $i \in [n]$ für die eigene Auszahlung gilt, $(\mathbf{x}^\top \mathbf{A})_i \geq v$, und zwar für ein möglichst großes v . Formal lautet also das Ziel von Spieler 1:

$$\max_{\mathbf{x} \in \Delta^m, v \in \mathbb{R}} v$$

u. d. N. $\forall i \in [n] : (\mathbf{x}^\top \mathbf{A})_i \geq v$

Die Bedingung $\mathbf{x} \in \Delta^m$ ist gleichbedeutend mit $\sum_{i \in [m]} x_i = 1$. Diese Bedingung müssen wir durch zwei Ungleichungen darstellen. Da die Einträge der Auszahlungsmatrix jedoch alle positiv sind, ist die Auszahlung für den Maximierungsspieler monoton in x_i für alle $i \in [m]$. Dadurch können wir uns die Bedingung $\sum_{i \in [m]} x_i \geq 1$ sparen. Kehren wir noch Ungleichheitszeichen

in den Garantiebedingungen durch Multiplikation mit -1 um, erhalten wir ein lineares Programm in Standardform (mit impliziten Nichtnegativitätsbedingungen):

$$\begin{aligned} & \max \quad (0, \dots, 0, 1) \cdot (x_1, \dots, x_m, v)^\top \\ \text{u. d. N.} \quad & \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & -\mathbf{A}^\top & & \vdots \\ & & & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ v \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Betrachten wir das Problem aus der Perspektive des Minimierungsspielers, erhalten wir entsprechend das folgende lineare Programm:

$$\begin{aligned} & \min \quad (0, \dots, 0, 1) \cdot (y_1, \dots, y_n, w)^\top \\ \text{u. d. N.} \quad & \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & -\mathbf{A} & & \vdots \\ & & & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ w \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die beiden Programme dual sind und somit den gleichen Lösungswert haben. Diesen bezeichnen wir als *Wert* des Nullsummenspiels. Wir haben damit das folgende Theorem gezeigt.

Theorem 1 (Minimax Theorem). *Für jedes Nullsummenspiel mit Auszahlungsmatrix A gilt*

$$\max_{\mathbf{x} \in \Delta^m} \min_{\mathbf{y} \in \Delta^n} \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{y} = \min_{\mathbf{y} \in \Delta^n} \max_{\mathbf{x} \in \Delta^m} \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{y}$$

und

$$\max_{\mathbf{x} \in \Delta^m} \min_{j \in [n]} \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{e}_j = \min_{\mathbf{y} \in \Delta^n} \max_{i \in [n]} \mathbf{e}_i^\top \mathbf{A} \mathbf{y}.$$

1.2 Extensive Form

Es ist nun eine berechtigte Frage, inwieweit im Falle von echten Spielen eine Modellierung durch Matrizen geeignet ist. Wie sehen solche Strategien für typische Spiele wie Schach, Go, Vier Gewinnt oder Mühle aus? Hier bietet sich eine andere Darstellung an. Bei diesen Spielen machen die Spieler abwechselnd Züge und wählen nicht nur eine Strategie aus. Wir können solche Spiele in der so genannten *extensiven Form* darstellen.

Wir modellieren das Spiel als Baum. Jeder Knoten ist mit einem Spieler beschriftet, der in dieser Phase des Spiels am Zug ist, und die ausgehenden Kanten jedes Knotens entsprechen den Strategien, die der Spieler in dieser Situation wählen kann. Die Knoten, an denen Spieler i an der Reihe ist,

bezeichnen wir mit V_i . Das Spiel endet an den Blättern des Baumes, die wiederum mit der jeweiligen Auszahlung, die Spieler 2 an Spieler 1 zahlt, beschriftet sind. Die Auszahlung an Blatt w bezeichnen wir mit a_w . Wir möchten auch Spiele modellieren können, bei denen die Spieler verdeckte Züge machen oder gleichzeitig handeln (z.B. die Aufstellungsrunde beim Schiffe Versenken). Dazu partitionieren wir die Knotenmenge V_i in *Informationsmengen* $V_{i,j}$, die jeweils (einen oder mehrere) Knoten eines Spielers enthalten, die dieser Spieler nicht unterscheiden kann. Der Spieler muss sich daher an allen Knoten einer Informationsmenge gleich verhalten, insbesondere haben alle Knoten einer Informationsmenge gleichen Ausgrad. Die ausgehenden Kanten aller Knoten werden zu diesem Zweck nummeriert. Eine Strategie von Spieler i ist dann eine Funktion, die jeder Informationsmenge $V_{i,j}$ (und damit jedem Knoten in dieser Informationsmenge) eine der ausgehenden Kanten zuordnet. Ein paar von Strategien der beiden Spieler definiert so einen eindeutigen Pfad von der Wurzel zu einem Blatt, an dem wir die Auszahlung für Spieler 1 finden.

Das Konzept der gemischten Strategien überträgt sich in die extensive Form, indem jeder Informationsmenge eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den ausgehenden Kanten zugeordnet wird.

Äquivalenz der Darstellungen. Ein Spiel in Normalform mit Auszahlungsmatrix \mathbf{A} kann in die extensive Form umgewandelt werden, indem der Wurzelknoten mit dem Zeilenspieler beschriftet wird. Von diesem Knoten geht für jede Zeile in \mathbf{A} eine Kante aus. Die Knoten der nächsten Ebene werden mit dem Spaltenspieler beschriftet und bilden eine Informationsmenge, da der Spaltenspieler nicht erfährt, welche Zeile sein Gegner gewählt hat. Jeder dieser Knoten enthält dann je eine ausgehende Kante für jede Spalte von \mathbf{A} . Aus einer $m \times n$ -Matrix wird so ein Baum mit $1 + m + mn$ Knoten.

Umgekehrt kann jedes Spiel in extensiver Form in ein Spiel in Matrixform umgewandelt werden, indem alle Strategien enumeriert werden und der Matrixeintrag a_{ij} auf a_w gesetzt wird, wobei w das Blatt ist, das durch die Strategien i und j erreicht wird. Da die Strategien in extensiver Form auf den Informationsmengen definierte Funktionen sind, kann ihre Anzahl exponentiell groß sein. Spiele in Normalform sind also in der Regel exponentiell größer als Spiele in extensiver Form.

Abschließend sei bemerkt, dass natürlich die Regeln von Spielen wie Schach und Go noch wesentlich kompakter als in der extensiven Form repräsentiert werden können. Außerdem können zufällige Züge (z.B. das Geben der Karten) durch einen zusätzlichen Spieler modelliert werden, der die Knotenmenge V_0 kontrolliert. Dessen Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden dann im Folgenden als fix angesehen.

1.2.1 Spiele mit vollständiger Information

Betrachten wir zunächst Spiele mit *vollständiger Information*, das heißt solche Spiele, bei denen alle Informationsmengen nur einen einzigen Knoten enthalten. In diese Klasse fallen die meisten Strategiespiele wie Schach, Go, Vier Gewinnt etc.

Theorem 2. *Jedes endliche Spiel mit vollständiger Information besitzt ein Minimax-Gleichgewicht in reinen Strategien.*

Beweis. Hat der Spielbaum die Tiefe 1, gilt die Aussage offensichtlich. Betrachten wir einen Spielbaum der Tiefe $d \geq 2$. Alle Teilspiele haben nach Induktionsvoraussetzung ein Gleichgewicht in reinen Strategien, da die zugehörigen Teilbäume eine Höhe von höchstens $d - 1$ haben. Außerdem sind die entsprechenden Teilspiele wieder Nullsummenspiele, denen ein Wert zugeordnet werden kann. Sei o. B. d. A. der Spieler an der Wurzel der Maximierungsspieler. Für diesen Spieler ist es eine reine Maximin-Strategie, an der Wurzel einen Nachfolgeknoten auszuwählen, für den der Wert des entsprechenden Teilspiels maximal ist. \square

Ebenso gilt die Umkehrung dieses Theorems: Jedes Normalformspiel, das ein Gleichgewicht in reinen Strategien besitzt, läßt sich in ein Spiel mit vollständiger Information in extensiver Form umwandeln. Es kann die oben angegebene Konstruktion eines Baums der Höhe 2 verwendet werden, wobei die Informationsmenge, die alle Knoten der Ebene 2 enthält, nicht benötigt wird. Jeder Knoten erhält stattdessen eine eigene Informationsmenge. Wir hatten gesehen, dass das Gleichgewicht einem Sattelpunkt der Matrix entspricht. Daher hat der Zeilenspieler keinen Nachteil, wenn der Spaltenspieler die von ihm gewählte Zeile kennt und die Spieler können ihre Strategien nacheinander wählen.

1.2.2 Spiele mit unvollständiger Information

Wir betrachten nun die Frage, ob und wie wir Spiele in extensiver Form und mit möglicherweise unvollständiger Information effizient lösen können. Wir kennen bereits einen naiven Algorithmus für dieses Problem: Wir können das Spiel in Normalform konvertieren und das bekannte zugehörige lineare Programm lösen. Dies kann jedoch einen exponentiellen Blow-Up bedeuten. Wir suchen daher nach einer alternativen Lösung.

Wir beschreiben im folgenden den Algorithmus von Koller, Megiddo und von Stengel [1]. Der Spielbaum sei beschrieben durch den Graphen $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ mit $E_i = \{(v, w) \mid v \in V_i\}$. Es wird sich zunächst als hilfreich erweisen, Strategien in einer anderen Form, nämlich in *sequentieller Form* darzustellen. Betrachte eine gemischte Strategie \mathbf{x} von Spieler 1. Diese sei dargestellt durch die Beschriftung aller Kanten, die von Knoten in V_1 ausgehen, mit Wahrscheinlichkeiten, d. h. $\mathbf{x} = (x_e)_{e \in E_1}$. (Dabei müssen

1. Zweipersonen-Nullsummenspiele

Knoten, die Spieler 1 gehören, die aber nicht erreicht werden, da Spieler 1 eine Kante auf dem Weg zwischen Wurzel und diesem Knoten den Wert 0 zuweist, nicht beschriftet werden.) Statt den Kanten beschriften wir nun die Knoten selbst. Knoten v erhält den Wert r_v . Dabei ist r_v das Produkt aller Wahrscheinlichkeiten auf dem Weg zwischen Wurzel und v , die an Kanten in E_1 stehen. Sei $P(v)$ die Menge der Kanten auf dem eindeutigen Pfad zwischen Wurzel und Knoten v . Dann ist

$$r_v = \prod_{e \in P(v) \cap E_1} x_e.$$

Wir nennen die r_v *Realisierungsgewichte*. Aus den r_v können wir die Wahrscheinlichkeit einer Kante $e = (v, v')$ zurückrechnen, indem wir den Quotienten $r_{v'}/r_v$ bilden.

Fassen wir für $v \in V$ die r_v in einem Vektor $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{|V|}$ zusammen, können wir die Bedingung „ \mathbf{r} ist ein Vektor von Realisierungsgewichten“ wie folgt als lineares Gleichungssystem formulieren. Zunächst stellen wir fest, dass für einen Knoten v und einen Nachkommen v' auf deren Verbindungspfad keine durch Spieler 1 kontrollierte Kante liegt, gilt $r_v = r_{v'}$. Solche Variablen ersetzen wir sinnvollerweise durch einen Repräsentanten. Wir behalten hier beide, um die Notation einfach zu halten. Für einen Knoten v , der durch Spieler 1 kontrolliert wird und dessen Kinder w_1, \dots, w_k muss gelten

$$\sum_{l \in [k]} r_{w_l} = r_v.$$

Außerdem muss für die jeweils „höchsten“ Knoten v eines Spielers gelten $r_v = 1$. Für jede Informationsmenge $V_{1,j}$, alle Knoten $u, w \in V_{1,j}$ und alle i muss gelten $r_{v_i} = r_{w_i}$, wobei v_i bzw. w_i das i -te Kind von v bzw. w sind. Diese Bedingungen können wir durch $|V_{1,j} - 1|$ viele Gleichungen beschreiben. Insgesamt erhalten wir also höchstens polynomiell viele lineare Gleichungen, die wir als $\mathbf{Er} \leq \mathbf{e}$ formulieren. Außerdem benötigen wir die entsprechenden Nichtnegativitätsbedingungen.

Wir definieren analog einen Vektor von Realisierungsgewichten für Spieler 2, den wir mit \mathbf{s} bezeichnen. Die entsprechenden Nebenbedingungen seien durch $\mathbf{Fs} \geq \mathbf{f}$ gegeben.

Nehmen wir zunächst an, die Strategie von Spieler 2 läge fest und sei gegeben durch den Vektor von Realisierungsgewichten \mathbf{s} . Dann erhalten wir die erwartete Auszahlung von Spieler 1 als Summe über die Auszahlung aller Blätter multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, dass dieses Blatt erreicht wird, also

$$\sum_{v \text{ ist Blatt}} r_v \cdot s_v \cdot a_v.$$

Für eine geeignete Matrix \mathbf{A} können wir die erwartete Auszahlung von Spieler 1 als $\mathbf{r}^\top \mathbf{A} \mathbf{s}$ schreiben. Wir erhalten insgesamt für eine feste gemischte

Strategie des Gegners \mathbf{s} das lineare Programm

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{r}} \mathbf{r}^\top (\mathbf{A}\mathbf{s}) \\ \text{u. d. N.} \quad & \mathbf{E}\mathbf{r} \leq \mathbf{e} \end{aligned}$$

Alternativ kann Spieler 1 auch das duale Programm lösen:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}} \mathbf{u}^\top \mathbf{e} \\ \text{u. d. N.} \quad & \mathbf{E}^\top \mathbf{u} \geq (\mathbf{A}\mathbf{s}). \end{aligned}$$

Dies ist der erwartete Gewinn, den Spieler 1 realisieren kann, wenn Spieler 2 die Strategie \mathbf{s} spielt. Dies möchte Spieler 2 minimieren:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{s}, \mathbf{u}} \mathbf{u}^\top \mathbf{e} & (1.1) \\ \text{u. d. N.} \quad & \mathbf{E}^\top \mathbf{u} \geq (\mathbf{A}\mathbf{s}) \\ & \mathbf{F}\mathbf{s} \geq \mathbf{f} \end{aligned}$$

Durch eine analoge Argumentation erhalten wir das lineare Programm für Spieler 1.

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{r}, \mathbf{u}'} \mathbf{u}'^\top \mathbf{f} & (1.2) \\ \text{u. d. N.} \quad & \mathbf{F}^\top \mathbf{u}' \leq (\mathbf{A}^\top \mathbf{r}) \\ & \mathbf{E}\mathbf{r} \leq \mathbf{e} \end{aligned}$$

Die beiden Programme (1.1) und (1.2) sind dual. Wir haben das Minimax-Theorem für Spiele mit unvollständiger Information in extensiver Form neu bewiesen und haben gleichzeitig einen Algorithmus zur Berechnung von Gleichgewichten in diesen Spielen, der ohne einen exponentiellen Blow-Up auskommt.

Kapitel 2

Allgemeine Zweipersonenspiele

Wir verallgemeinern unser Modell nun so, dass nicht zwangsläufig die Auszahlung von Spieler 1 einem Verlust von Spieler 2 entspricht. Stattdessen bekommt Spieler 2 eine eigene, von \mathbf{A} unabhängige Auszahlungsmatrix \mathbf{B} . Beide Spieler wollen nun die Auszahlung maximieren. Im Spezialfall der Nullsummenspiele ist $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$. Betrachten wir zunächst wieder beispielhaft ein solches Spiel, das berühmte Gefangenendilemma. Zwei Ganoven werden verhaftet, jedoch können ihnen lediglich kleinere Straftaten nachgewiesen werden. Für diese Straftaten drohen den beiden „nur“ je ein Jahr Haft. Es gibt jedoch eine Kronzeugenregelung, bei denen einer den anderen verpfeifen kann, worauf der eine frei kommt und der andere für zehn Jahre hinter Gitter wandert. Verraten sich beide gegenseitig, wird diese Regelung nicht angewendet und beide werden wegen der schlimmeren Straftat verurteilt, jedoch aufgrund des Geständnisses nicht zu zehn, sondern nur zu fünf Jahren.

Wir stellen die beiden Auszahlungsmatrizen in einer Matrix dar, deren Eintrag i, j das Paar (a_{ij}, b_{ij}) ist. Zeile und Spalte 1 ist die Strategie „schweigen“ und Zeile und Spalte 2 ist die Strategie „verraten“:

$$\begin{bmatrix} (-1, -1) & (-10, 0) \\ (0, -10) & (-5, -5) \end{bmatrix}.$$

Wir sehen hier, dass aus der Sicht jedes Ganoven die Strategie „verraten“ immer besser ist als die Strategie „kooperieren“. Verrät der andere ebenfalls, geht man nur für fünf statt für zehn Jahre ins Gefängnis, verrät der andere nicht, geht man gar nicht ins Gefängnis statt ein Jahr. Wir sagen daher, dass die Strategie „kooperieren“ *dominiert* ist, während die Strategie „verraten“ *dominant* ist. Wir können diese Strategien aus dem Spiel entfernen und so die Matrix verkleinern, ohne das Spiel substantiell zu verändern. Dadurch entsteht ein kleineres Spiel, das möglicherweise wieder dominierte Strategien enthält, die entfernt werden können. Solche Strategien heißen dann *iterativ*

dominiert und können ebenfalls entfernt werden. In unserem kleinen Beispiel reicht bereits ein Schritt aus, um das Spiel zu lösen. Es muss jedoch im Allgemeinen keine dominierten Strategien geben.

Abschließend zu diesem Beispiel bemerken wir noch, dass das schwere Los der Ganoven von der fehlenden Möglichkeit zur Kommunikation her rührt. Können sie sich nicht absprechen, gehen beide für insgesamt zehn Jahre ins Gefängnis, während sie dieses durch Absprache hätten vermeiden können. Sie müssten dann nur für insgesamt zwei Jahre ins Gefängnis gehen. Hier kann sie nur ihre Ganovenehre retten.

Zunächst stellen wir fest, dass Spieler 1 durch Anwendung des Minimax-Prinzips, d. h. Wahl einer Zeile i mit $i \in \arg \max_{i \in [m]} \min_{j \in [n]} (a_{ij})$ tatsächlich den entsprechenden Gewinn sichern kann. Ist Zeile i so gewählt, kann Spieler 2 den Gewinn von Spieler 1 auf nicht weniger als $\min_{j \in [n]} a_{ij}$ drücken. Dies ist für Spieler 1 jedoch zu pessimistisch, da Spieler 2 ja nicht den Gewinn von Spieler 1 minimieren will, sondern seinen eigenen Gewinn maximieren.

Einige allgemeine Zweipersonenspiele lassen sich jedoch nach einem ähnlichen Prinzip lösen wie Nullsummenspiele mit Sattelpunkt. Ein Sattelpunkt entspricht bei zwei Auszahlungsmatrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} einem Zeilen- und Spaltenpaar (i, j) , bei dem Eintrag a_{ij} Maximum seiner Spalte und b_{ij} Maximum seiner Zeile ist, d. h. bei fester Spalte j präferiert der Zeilenspieler die Zeile i und bei fester Zeile i präferiert der Spaltenspieler Spalte j .

Bei Nullsummenspielen überzeugt man sich leicht, dass es nur einen Sattelpunkt geben kann, wenn die Maxima der Spalten und Minima der Zeilen eindeutig bestimmt sind. Sind Maxima und Minima nicht eindeutig bestimmt, haben die Sattelpunkte zumindest gleichen Wert. Bei unserer Analogie für allgemeine Zweipersonenspiele ist das nicht der Fall. Betrachte das folgende Spiel:

$$\begin{bmatrix} (3, 4) & (5, 3) \\ (2, 5) & (7, 6) \end{bmatrix}.$$

Hier sind die beiden Strategienpaare $(1, 1)$ und $(2, 2)$ Gleichgewichte. In Spalte 1 bevorzugt der Zeilenspieler Zeile 1 (da $3 > 2$), und in Zeile 1 bevorzugt der Spaltenspieler Spalte 1 (da $4 > 3$). In Spalte 2 bevorzugt der Zeilenspieler Zeile 2 (da $7 > 5$), und in Zeile 2 bevorzugt der Spaltenspieler Spalte 2 (da $6 > 5$). Das Spiel hat also zwei Gleichgewichte, von denen eines für beide Spieler höhere Auszahlungen bietet. Die Spieler könnten sich daher absprechen und auf die Strategie $(2, 2)$ einigen.

Das folgende Spiel hat ebenfalls zwei Gleichgewichte, die sich jedoch für die beiden Spieler erheblich in der Auszahlung unterscheiden:

$$\begin{bmatrix} (1000, 1) & (0, 0) \\ (0, 0) & (1, 1000) \end{bmatrix}.$$

Die bisher betrachteten Spiele hatten alle Gleichgewichte in reinen Strategien. Da wir uns aber in diesem Kapitel mit einer Verallgemeinerung von Nullsummenspielen beschäftigen, ist auch hier klar, dass solche Gleichgewichte nicht existieren müssen. Wir betrachten daher ein Lösungskonzept für allgemeine Spiele, das auch für gemischte Strategien anwendbar ist.

Definition 2 (beste Antwort). Eine gemischte Strategie $\mathbf{x} \in \Delta^m$ für Spieler 1 heißt beste Antwort auf die gemischte Strategie $\mathbf{y} \in \Delta^n$, wenn für alle Strategien $\mathbf{x}' \in \Delta^m$ gilt

$$\mathbf{x}'^\top \mathbf{A}\mathbf{y} \leq \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{y}.$$

Eine analoge Definition gilt für eine Strategie \mathbf{y} von Spieler 2.

Im Allgemeinen kann es mehr als eine beste Antwort geben. Wählt Spieler i nun eine solche beste Antwort, führt dies vielleicht dazu, dass der andere Spieler seine Strategie wechseln möchte. Ein gemischtes Strategieprofil ist also nur dann stabil, wenn sich kein Spieler verbessern kann.

Definition 3 (Nash-Gleichgewicht). Ein Paar von gemischten Strategien $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Delta^m \times \Delta^n$ heißt Nash-Gleichgewicht, wenn \mathbf{x} eine beste Antwort auf \mathbf{y} ist und \mathbf{y} eine beste Antwort auf \mathbf{x} ist.

In einem Nash-Gleichgewicht hat also kein Spieler einen Anreiz, einseitig seine Strategie zu verändern, da keine andere Strategie für ihn zu einer Verbesserung führen kann.

Diese Definition erfordert einige Annahmen über die Spieler. Zunächst nehmen wir an, dass alle Spieler das Spiel, insbesondere die Auszahlungsfunktion kennen. Außerdem nehmen wir an, dass alle Spieler ihre eigene Auszahlung maximieren wollen ohne dabei Allianzen mit anderen Spielern zu bilden. Insbesondere sind Seitenzahlungen zwischen den Spielern, die deren Auszahlung verändern, verboten. Schließlich nehmen wir an, dass die Spieler wissen, dass die anderen Spieler all das ebenfalls wissen, und dass diese wissen, dass sie das wissen usw.

2.1 Existenz von Nash-Gleichgewichten

Die Lösungen der LPs für Nullsummenspiele sind ebenfalls Nash-Gleichgewichte. Für Nullsummenspiele ist daher auch klar, dass Nash-Gleichgewichte stets existieren. Im Allgemeinen müssen wir die Existenz von Nash-Gleichgewichten jedoch zunächst zeigen. Die Hauptidee dabei ist es, eine Abbildung anzugeben, die jedem Strategienpaar (\mathbf{x}, \mathbf{y}) eine „bessere Antwort“ zuordnet, und deren Fixpunkte Nash-Gleichgewichte sind. Die Existenz von Nash-Gleichgewichten kann dann über die Existenz von Fixpunkten dieser Abbildung gezeigt werden. Dazu werden wir Brouwers Fixpunktsatz beweisen. Dieser wiederum beruht auf dem folgenden Lemma.

Wir betrachten einen Graphen in der Form eines großen Dreiecks, das in ein Dreieckgitter unterteilt ist. Die Knoten dieses Graphen sind in den Farben 1, 2 und 3 gefärbt. Eine Färbung heißt *zulässig*, wenn die Knoten auf der Außenkante des großen Dreiecks jeweils in einer der Farben der beiden zugehörigen Ecken gefärbt sind. Eine Kante eines kleinen Dreiecks, die auf der Seite des großen Dreiecks liegt, nennen wir Außenkante.

Lemma 3 (Sperners Lemma). *Bei jeder zulässigen Färbung eines Dreiecks T gibt es eine ungerade Anzahl von kleinen Dreiecken, deren drei Knoten alle verschieden gefärbt sind.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz. Wir definieren nun einen Weg durch den Graphen, wobei wir uns die kleinen Dreiecke als Räume und die zweifarbigen Kanten als Türen vorstellen. Betrachte die Außenseite des großen Dreiecks, das die Eckknoten der Farben 1 und 2 verbindet. Alle Knoten auf diesem Pfad sind 1-gefärbt oder 2-gefärbt. Auf diesem Pfad gibt es mindestens eine Tür, also eine Kante e , die zwei unterschiedlich gefärbte Knoten verbindet (sonst wären die beiden Ecken gleich gefärbt). Die Kante e gehört zu genau einem Raum. Ist der dritte Knoten dieses Raumes 3-gefärbt, sind wir fertig. Ist er entweder 1-gefärbt oder 2-gefärbt, hat das kleine Dreieck eine weitere Tür, die zu einem anderen Raum führt. Entweder finden wir nun ein dreifarbiges kleines Dreieck, oder wir können diese Konstruktion fortsetzen. Solange wir dies tun, erreichen wir nur Räume, deren Knoten in den Farben 1 und 2 gefärbt sind. Irgendwann erreichen wir das Dreieck, das zum Eckknoten mit der Farbe 3 gehört. Spätestens dieses Dreieck ist dreifarbig.

Bei dieser Konstruktion müssen wir allerdings noch zwei Dinge sicherstellen. Erstens darf die Konstruktion nicht zu einem Kreis führen und zweitens müssen wir den Fall betrachten, dass wir das große Dreieck verlassen. Betrachten wir zunächst den zweiten Fall. Da wir immer nur über 1-2-gefärbte Kanten gehen, können wir das große Dreieck nur über die entsprechende Seite verlassen. Die Anzahl der zweifarbigen Kanten auf dieser Seite ist jedoch ungerade. Daher finden wir zu jedem Ausgang auch wieder einen Eingang und wir können den Pfad fortsetzen.

Nehmen wir nun an, dass die Konstruktion zu einem Kreis führt. Betrachte das erste kleine Dreieck, das doppelt besucht wird. Dieses Dreieck wurde durch die Kante e betreten, durch die Kante $e' \neq e$ verlassen und durch die Kante $e'' \notin \{e, e'\}$ wieder erreicht. Das Dreieck müsste also drei zweifarbige Kanten haben, was nicht möglich ist.

Es gibt eine ungerade Anzahl von Ein- und Aushängen, d. h. 1-2-Außenkanten. Da jeder Eingang, der nicht zu einem dreifarbigem Dreieck führt, wieder zu einem Ausgang führt, bleiben wieder ungerade viele Eingänge übrig, die zu einem dreifarbigem Dreieck führen. Außerdem können wir von jedem dreifarbigem Dreieck aus den Pfad zu einer zugehörigen 1-2-Außenkante *oder*

zu einem anderen dreifarbigem Dreieck zurückverfolgen. Daher ist die Anzahl der dreifarbigem Dreiecke ungerade. \square

Die Verallgemeinerung dieses Lemmas für höhere Dimensionen erfolgt per Induktion. Eine Hyperpyramide in n Dimensionen hat $n + 1$ Ecken. Zur sprachlichen Vereinfachung bezeichnen wir eine $n - 1$ -Dimensionale Pyramide als n -Pyramide. Diese hat n Ecken, die wieder in n verschiedenen Farben gefärbt sind. Die Seiten der n -Pyramide sind $(n - 1)$ -Pyramiden. Eine Färbung heißt nun legal, wenn für alle $n - 1$ -Pyramiden, die Seiten der n -Pyramide sind, nur in den Farben der jeweiligen Eckpunkte gefärbt sind und (rekursiv) diese $n - 1$ -Pyramiden legal gefärbt sind.

Wir können nun wie oben einen Pfad konstruieren, indem wir die $(n - 1)$ -Pyramide betrachten, deren Ecken die Farben 1 bis $n - 1$ haben. Induktiv können wir auf die $(n - 1)$ -Pyramide Sperners Lemma anwenden. Daher wissen wir, dass die $(n - 1)$ -Pyramide ungerade viele kleine $n - 1$ -Pyramiden enthält, die jeweils alle $n - 1$ Farben haben. Diese dienen uns nun als Türen. Betreten wir einen Raum, dessen verbleibende Ecke die Farbe n hat, sind wir wieder fertig. Hat sie eine andere Farbe $k \leq n - 1$, gibt es nun wieder nur eine Ausgangstür aus diesem Raum, nämlich diejenige, die der anderen k -gefärbten Ecke gegenüberliegt. Wir haben wieder einen eindeutigen Pfad ohne Kreise und ungerade viele Eingänge. Der Rest des Beweises folgt analog.

Theorem 4 (Brouwers Fixpunktsatz). *Jede kontinuierliche Abbildung von einer konvexen kompakten Menge in sich selbst hat einen Fixpunkt.*

Der Fixpunktsatz in einer Dimension kommt normalerweise im Grundstudium vor und hat einen einfachen geometrischen Beweis. Betrachte o. B. d. A. das Intervall $[0, 1]$ und die Funktion $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$, wobei $f(0) > 0$ und $f(1) < 1$ (ansonsten haben wir bereits einen Fixpunkt). Betrachte weiterhin die Identitätsfunktion auf $[0, 1]$, die einer Diagonalen in $[0, 1]^2$ entspricht. Der Graph von f beginnt also am linken Rand oberhalb der Diagonalen und endet am rechten Rand unterhalb. Da f kontinuierlich ist, muss der Graph die Diagonale schneiden. Die Schnittpunkte sind Fixpunkte. In mehreren Dimensionen benötigen wir Sperners Lemma zum Beweis.

Beweis von Theorem 4 für Dimension 2. Wir beweisen das Theorem für Dimension zwei. Zunächst können wir o. B. d. A. davon ausgehen, dass die Menge die Form eines Dreiecks hat. Ansonsten können wir eine zweidimensionale kompakte konvexe Menge zu einem Dreieck "verzerren". Diese Ergebnis aus der Topologie übernehmen wir ohne Beweis. In diesem Dreieck können wir dann jeden Punkt \mathbf{x} durch drei Schwerpunktkoordinaten (x_1, x_2, x_3) mit $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ darstellen. Die Punkte $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ fallen dabei auf die Ecken des Dreiecks. Die Mengen $L_i(c) = \{\mathbf{x} | x_i = c\}$ sind dabei

Geraden, die parallel zur Grundlinie gegenüber von Ecke i liegen, und $L_i(0)$ sind die Grundlinien selbst.

Wir betrachten nun die kontinuierliche Abbildung f in diesen Koordinaten. Wir definieren zunächst drei Mengen $S_i = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x})_i \leq x_i\}$. Es ist also S_i die Menge der Punkte, die durch f weiter von Ecke i weggerückt werden. Offensichtlich sind alle Punkte in $\mathcal{S} := \bigcap_i S_i$ Fixpunkte von f . Betrachte $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$. Es gilt $f(\mathbf{x})_i \leq x_i$ für $i = 1, \dots, 3$. Da aber auch gilt $\sum_i f(\mathbf{x})_i = 1 = \sum_i x_i$, muss also gelten $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Weiterhin folgt, dass jeder Punkt in mindestens einer Menge S_i liegt.

Wir zeigen nun, dass für alle Punkte \mathbf{x} auf der Grundlinie zwischen den Ecken 1 und 2 gilt $\mathbf{x} \in S_1 \cup S_2$. Der Punkt \mathbf{x} hat die Form $(\alpha, 1 - \alpha, 0)$. Liegt $f(\mathbf{x})$ ebenfalls auf dieser Grundlinie, hat $f(\mathbf{x})$ die Form $(\alpha', 1 - \alpha', 0)$ und es gilt $\alpha' \leq \alpha$, also $\mathbf{x} \in S_1$, oder $1 - \alpha' \leq 1 - \alpha$, also $\mathbf{x} \in S_2$. Liegt $f(\mathbf{x})$ nicht auf dieser Grundlinie, ist also $f(\mathbf{x})_3 > 0 = x_3$, gilt $\mathbf{x} \notin S_3$. Da \mathbf{x} in mindestens einer Menge S_i liegt, gilt die Aussage also wieder.

Die Mengen S_i sind außerdem abgeschlossen, d. h. jede konvergente Folge in S_i hat ihren Grenzwert in S_i . Betrachte eine solche Folge $(\mathbf{x}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert \mathbf{x}^* . Es gilt stets $f(\mathbf{x}^n)_i \leq x_i^n$. Da f kontinuierlich ist, gilt diese Aussage auch für \mathbf{x}^* und somit ist $\mathbf{x}^* \in S_i$.

Wir legen nun ein Dreieckgitter über unser Dreieck und färben die Knoten entsprechend ihrer Zugehörigkeit zu den Mengen S_i . Ist ein Knoten in mehreren Mengen enthalten, wählen wir eine beliebig. Wir haben oben gezeigt, dass die Außenseite des Dreiecks entsprechend den Voraussetzungen von Sperners Lemma gefärbt sind. Es gibt also ein Dreieck für das je eine Ecke in S_1 , S_2 und S_3 enthalten ist. Dieses Dreieck können wir durch Wahl eines entsprechend feinen Gitters beliebig klein machen.

Betrachten wir die Mengen $S_{12} = S_1 \cap S_2$ und die Menge S_3 und nehmen wir zum Zwecke des Widerspruchs an, die Menge $\mathcal{S} = S_1 \cap S_2 \cap S_3$ sei leer. Insbesondere können dann die Mengen S_{12} und S_3 aufgrund der Kompaktheit nicht aneinanderstoßen, d. h. je zwei Punkte in S_{12} und S_3 haben einen Abstand von mindestens $\epsilon > 0$ (dabei kann ein beliebiges Abstandsmaß gewählt werden). Machen wir das Dreieckgitter so klein, dass die Seitenlängen kürzer als ϵ sind, kann es kein Dreieck mit Ecken in S_1 , S_2 und S_3 mehr geben. Ein Widerspruch. \square

Der Beweis kann auf einfache Art auf höhere Dimensionen erweitert werden. Dazu genügt es zu zeigen, dass die Seiten des Simplex wieder legal gefärbt sind.

Theorem 5 (Nash). *Jedes Spiel hat ein gemischtes Nash-Gleichgewicht.*

Beweis. Betrachte die folgende Abbildung $f : \Delta^m \times \Delta^n \mapsto \Delta^m \times \Delta^n$.

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \dots, g_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}), h_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \dots, h_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})),$$

wobei

$$g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{x_i + k_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{1 + \sum_{l \in [m]} k_l(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \quad \text{für } i \in [m] \text{ und}$$

$$h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{y_i + k'_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{1 + \sum_{l \in [n]} k'_l(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \quad \text{für } i \in [n]$$

mit

$$k_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max(0, (\mathbf{A}\mathbf{y})_i - \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{y}) \quad \text{für } i \in [m] \text{ und}$$

$$k'_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max(0, (\mathbf{x}^\top \mathbf{B})_i - \mathbf{x}^\top \mathbf{B}\mathbf{y}) \quad \text{für } i \in [n].$$

Dabei ist k_i (bzw. k'_i) der Überschuss der Strategie i gegenüber der durchschnittlichen Auszahlung $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{y}$ von Spieler 1 (bzw. $\mathbf{x}^\top \mathbf{B}\mathbf{y}$ für Spieler 2). Die Aussagen über g im Rest des Beweises gelten auch, wenn g durch h , k durch k' , \mathbf{x} durch \mathbf{y} , m durch n und Spieler 1 durch Spieler 2 ersetzt wird.

Offenbar liegt $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ wieder im Simplex $\Delta^m \times \Delta^n$: Es gilt für alle $i \in [m]$, dass $g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ sowie $g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 1$, da $x_i \leq 1$ und $k_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sum_{l \in [m]} k_l(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Außerdem ist

$$\sum_{i \in [m]} g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\sum_{i \in [m]} x_i + \sum_{i \in [m]} k_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{1 + \sum_{l \in [m]} k_l(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = 1.$$

Es ist ebenfalls leicht zu sehen, dass ein Punkt $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ genau dann ein Fixpunkt von f ist, wenn er auch ein Nash-Gleichgewicht ist. Ist (\mathbf{x}, \mathbf{y}) Fixpunkt, so ist $k_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ für alle $i \in [m]$ und somit ist (\mathbf{x}, \mathbf{y}) Nash. (Wäre $k_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0$ für mindestens ein $i \in [m]$, so gäbe es auch ein $j \in [m]$ mit $k_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ und somit wäre $g_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < x_j$ und (\mathbf{x}, \mathbf{y}) kein Fixpunkt.) An jedem Nash-Gleichgewicht $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ gilt umgekehrt $k_i(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = 0$ für alle $i \in [m]$ und somit ist $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ Fixpunkt von f .

Da der Definitions- und Bildbereich von f konvex sind und f offensichtlich kontinuierlich ist, können wir Brouwers Fixpunktsatz anwenden. \square

2.2 Der Lemke-Howson Algorithmus

Im Folgenden betrachten wir einen Algorithmus zur Berechnung von einem Nash-Gleichgewicht [2]. Der Algorithmus ist nicht geeignet, wenn wir alle Nash-Gleichgewichte kennen wollen. Da der Algorithmus immer terminiert, ist dies ein alternativer Beweis für die Existenz von Nash-Gleichgewichten. Eine hervorragende Beschreibung des Algorithmus findet sich ebenfalls in [3].

In diesem Kapitel gehen wir wieder o. B. d. A. davon aus, dass die Matrixeinträge der Auszahlungsmatrizen positiv sind.

2.2.1 Formulierung als LCP

Ähnlich wie bei der Behandlung von Nullsummenspielen betrachten wir zunächst das Verhalten von Spieler 1 bei fester Wahl der gegnerischen Strategie \mathbf{y} . Spieler 1 will eine beste Antwort auf \mathbf{y} finden, d. h. er will seine erwartete Auszahlung $\mathbf{x}^\top(\mathbf{A}\mathbf{y})$ maximieren. Dabei muss wieder \mathbf{x} in Δ^m liegen.

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{x}^\top(\mathbf{A}\mathbf{y}) \\ \text{u. d. N.} \quad & \mathbf{1}_m^\top \cdot \mathbf{x} = 1 \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Das duale Programm hat nur eine Variable, die der Spieler ebenso gut minimieren kann.

$$\begin{aligned} \min \quad & u \\ \text{u. d. N.} \quad & \mathbf{1}_m \cdot u \geq \mathbf{A}\mathbf{y} \\ & u \geq 0. \end{aligned}$$

Hierbei ist $u \cdot \mathbf{1}_m$ der Vektor, bei dem alle Komponenten den Wert u haben. Nach dem starken Dualitätsprinzip ist eine Lösung für das erste LP genau dann optimal, wenn das zweite LP eine Lösung mit gleichem Wert hat, d. h. $\mathbf{x}^\top(\mathbf{A}\mathbf{y}) = u$ unter den entsprechenden Nebenbedingungen. Da $\mathbf{1}_m^\top \cdot \mathbf{x} = 1$, ist dies äquivalent zu $\mathbf{x}^\top(\mathbf{A}\mathbf{y}) = (\mathbf{x}^\top \mathbf{1}_m) \cdot u$ oder

$$\mathbf{x}^\top(\mathbf{1}_m \cdot u - \mathbf{A}\mathbf{y}) = 0.$$

Dies verlangt, dass die Vektoren \mathbf{y} und $\mathbf{1}_m \cdot u - \mathbf{A}\mathbf{y}$ orthogonal sein müssen und, da ihre Einträge nichtnegativ sind, dass in jeder Dimension mindestens ein Vektor den Wert 0 haben muss.

Dieselbe Überlegung führt für Spieler 2 zu einem analogen Ergebnis. Spieler 2 minimiert v unter der Nebenbedingung $\mathbf{1}_n \cdot v \geq (\mathbf{B}^\top \mathbf{x})$ wobei eine primal-duale Lösung (\mathbf{y}, v) optimal ist g. d. w. $\mathbf{y}^\top(\mathbf{1}_n \cdot v - \mathbf{B}^\top \mathbf{x}) = 0$ gilt.

Insgesamt erhalten wir die folgende Charakterisierung von Nash-Gleichgewichten. Das Paar (\mathbf{x}, \mathbf{y}) ist ein Nash-Gleichgewicht, wenn für geeignete u, v gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_m \cdot \mathbf{x} &= 1 \\ \mathbf{1}_n \cdot \mathbf{y} &= 1 \\ \mathbf{1}_m \cdot u - \mathbf{A}\mathbf{y} &\geq 0 \\ \mathbf{1}_n \cdot v - \mathbf{B}^\top \mathbf{x} &\geq 0 \\ \mathbf{x} &\geq 0 \\ \mathbf{y} &\geq 0 \\ \mathbf{x}^\top(\mathbf{1}_m \cdot u - \mathbf{A}\mathbf{y}) &= 0 \\ \mathbf{y}^\top(\mathbf{1}_n \cdot v - \mathbf{B}^\top \mathbf{x}) &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Die letzten beiden Bedingungen machen das Problem zu einem *linear complementarity problem* (LCP). Der wichtigste Algorithmus zum Lösen von LCPs unserer Form ist der Lemke-Howson Algorithmus.

2.2.2 Geometrische Beschreibung des Algorithmus

Um die Notation in diesem Abschnitt zu vereinfachen, nehmen wir an, dass die Strategien der beiden Spieler durch disjunkte Mengen bezeichnet werden. Nach wie vor sind die Strategien für Spieler 1 die Elemente der Menge $[m] = \{1, \dots, m\}$. Die Strategien von Spieler 2 bezeichnen wir mit $m+1, \dots, m+n$.

Wir versehen zunächst alle gemischten Strategien beider Spieler mit Markierungen aus der Menge der Strategien. Für einen Spieler erhält eine gemischte Strategie diejenigen reinen Strategien als Markierung, die entweder nicht benutzt werden oder beste Antworten des Gegners sind. Wir definieren für $1 \leq i \leq m$ und $m+1 \leq j \leq m+n$

$$\begin{aligned} X_i &:= \{\mathbf{x} \in \Delta^m \mid x_i = 0\}, \\ X_j &:= \{\mathbf{x} \in \Delta^m \mid (\mathbf{B}^\top \mathbf{x})_j \geq (\mathbf{B}^\top \mathbf{x})_k \ \forall k \in \{m+1, \dots, m+n\}\}, \\ Y_j &:= \{\mathbf{y} \in \Delta^n \mid y_j = 0\}, \\ Y_i &:= \{\mathbf{y} \in \Delta^n \mid (\mathbf{A}\mathbf{y})_i \geq (\mathbf{A}\mathbf{y})_k \ \forall k \in \{1, \dots, m\}\}. \end{aligned}$$

Nach unserer Definition von Nash-Gleichgewichten ist ein Paar (\mathbf{x}, \mathbf{y}) ein Nash-Gleichgewicht, wenn alle benutzten reinen Strategien beste Antworten sind. Also gilt

Lemma 6. *Ein paar von gemischten Strategien (\mathbf{x}, \mathbf{y}) ist genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn für alle $k \in \{1, \dots, m+n\}$ gilt $\mathbf{x} \in X_k$ oder $\mathbf{y} \in Y_k$.*

Wir betrachten zunächst den „normalen“ Fall. Der Simplex Δ^m ist eine m -dimensionale konvexe Punktmenge. Jede zusätzliche Markierung reduziert die Dimension dieses Raumes in der Regel um 1. Daher hat in der Regel jeder Punkt in Δ^m (Δ^n) höchstens m (n) Markierungen. Spiele, in denen dies nicht der Fall ist, nennen wir *degeneriert*.

Definition 4. *Ein Spiel heißt nicht degeneriert, wenn die Menge aller Punkte in Δ^m (in Δ^n) mit genau m Markierungen (genau n Markierungen) endlich ist. Ansonsten heißt das Spiel degeneriert.*

Wir definieren nun einen Graphen G_1 auf den endlich vielen Punkten mit m Markierungen in Δ^m . Zwei Strategien \mathbf{x} und \mathbf{x}' sind durch eine Kante $\{\mathbf{x}, \mathbf{x}'\}$ verbunden, wenn \mathbf{x} und \mathbf{x}' $m-1$ Markierungen gemeinsam haben. Außerdem erhält der Graph einen zusätzlichen Knoten $\mathbf{0}_m$, der alle Markierungen in $[m]$ enthält. Kanten für diesen Knoten werden nach den gleichen Regeln konstruiert. Einen analogen Graphen G_2 konstruieren wir für die Knoten in Δ^n . Schließlich betrachten wir den Produktgraphen $H = G_1 \times G_2$,

der aus Knoten (\mathbf{x}, \mathbf{y}) besteht. Zwei Knoten (\mathbf{x}, \mathbf{y}) und $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ sind dann durch eine Kante verbunden, wenn $\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ und \mathbf{x} und \mathbf{x}' in G_1 verbunden sind oder $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ und \mathbf{y} und \mathbf{y}' in G_2 verbunden sind. Wir nennen einen Knoten (\mathbf{x}, \mathbf{y}) k -fast vollständig markiert, wenn er alle Markierungen bis auf die Markierung k (*nicht* bis auf k viele) hat. Ein solcher Knoten enthält immer auch eine Markierung doppelt.

Wir können den Lemke-Howson Algorithmus nun als einfachen kombinatorischen Algorithmus auf H beschreiben. Der Algorithmus startet bei dem „künstlichen“ Gleichgewicht $(\mathbf{0}_m, \mathbf{0}_n)$ und traversiert den Graphen, bis er ein echtes Nash-Gleichgewicht findet.

1. Setze $v_0 = (\mathbf{0}_m, \mathbf{0}_n)$
2. Wähle eine beliebige ausgehende Kante $\{v_0, v_1\}$. Sei v_1 k -fast vollständig markiert. Setze $t = 1$.
3. Wiederhole
 - (a) Falls v_t vollständig markiert ist, gib v_t aus.
 - (b) Ansonsten enthält v_t eine Markierung doppelt. Setze v_{t+1} auf den Nachbarn von v_t , der diese Markierung nicht doppelt hat so dass $v_{t+1} \neq v_{t-1}$.
 - (c) Setze $t \leftarrow t + 1$.

Im nicht degenerierten Fall ist der Nachfolgeknoten eindeutig bestimmt (ohne Beweis). Somit gibt es keine Kreise und der Algorithmus terminiert. Da der Graph jedoch in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfallen kann, findet dieser Algorithmus nicht alle Nash-Gleichgewichte.

2.2.3 Algebraische Formulierung

Wir kehren zurück zu unserer Formulierung als LCP. Ignorieren wir zunächst die unteren beiden Komplementaritätsbedingungen in (2.1). Die restlichen (Un-)gleichungen definieren ein Polyeder $H = H_1 \times H_2$ mit

$$\begin{aligned} H_1 &= \{(\mathbf{x}, v) \mid \mathbf{x} \in \Delta^m, v \in \mathbb{R}, \mathbf{B}^\top \mathbf{x} \leq \mathbf{1}_n v\} \quad \text{und} \\ H_2 &= \{(\mathbf{y}, u) \mid \mathbf{y} \in \Delta^n, u \in \mathbb{R}, \mathbf{A}\mathbf{y} \leq \mathbf{1}_m u\}. \end{aligned}$$

Betrachten wir das Polyeder H_2 in $\Delta^n \times \mathbb{R}$. Die Bedingung $\mathbf{A}\mathbf{y} \leq \mathbf{1}_m u$ fordert, dass u mindestens den Wert von $(\mathbf{A}\mathbf{y})_i$ für alle $i \in [m]$ hat. In der u -Koordinate ist das Polyeder nach oben offen. Für $i \in [m]$ ist $(\mathbf{A}\mathbf{y})_i$ eine Hyperebene, und u ist mindestens das Maximum dieser Hyperebenen. Betrachten wir eine Facette von H_2 , die ein Teil der Hyperebene $(\mathbf{A}\mathbf{y})_i$ ist. Dies bedeutet, dass die i -te Hyperebene das Maximum bestimmt. Projizieren wir diese Facette auf Δ^n erhalten wir also eine Region, in der die reine

Strategie $i \in [m]$ eine beste Antwort ist, die Menge Y_i . Projizieren wir die Hyperebene der Nichtnegativitätsbedingung $y_j \geq 0$ auf Δ^n , erhalten wir genau die Menge Y_j . Projizieren wir das gesamte Polyeder auf Δ^n , sehen wir, dass die Knoten des Polyeders H_2 genau den Knoten des Graphen G_2 entsprechen. Die Ecken des Simplex Δ^n sind allerdings hier nicht mit dem Ursprung $\mathbf{0}_n$ verbunden, sondern haben Kanten in Richtung „unendlich“.

Wir transformieren nun durch Skalierung \mathbf{x} und \mathbf{y} nach

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}/v \quad \text{und} \quad \mathbf{y}' = \mathbf{y}/u. \quad (2.2)$$

Die Rücktransformation erfolgt über $\mathbf{x} = \mathbf{x}' \cdot v$ mit $v = 1/(\mathbf{1}_m^\top \mathbf{x}')$ bzw. $\mathbf{y} = \mathbf{y}' \cdot u$ mit $u = 1/(\mathbf{1}_n^\top \mathbf{y}')$. Die Rücktransformation stellt automatisch die Bedingung $\sum_i x_i = 1$ bzw. $\sum_i y_i = 1$ sicher. Eine entsprechende Bedingung an \mathbf{x}' und \mathbf{y}' ist daher nicht nötig. Wir erhalten durch die Transformation die Polyeder

$$\begin{aligned} P_1 &= \{\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x}' \geq \mathbf{0}_m, \mathbf{B}^\top \mathbf{x}' \leq \mathbf{1}_n\} \quad \text{und} \\ P_2 &= \{\mathbf{y}' \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{y}' \geq \mathbf{0}_n, \mathbf{A}\mathbf{y}' \leq \mathbf{1}_m\}. \end{aligned}$$

2.2.4 Der Pivotschritt

Für unsere Polyeder P_1 und P_2 führen wir wie bei der Simplexmethode Schlupfvariablen \mathbf{r} und \mathbf{s} ein und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{y}' + \mathbf{r} &= \mathbf{1}_m \\ \mathbf{B}^\top \mathbf{x}' + \mathbf{s} &= \mathbf{1}_n, \end{aligned} \quad (2.3)$$

was wir als $\mathbf{Cz} = \mathbf{q}$ schreiben können. Eine Methode zum Traversieren von Knoten des Polyeders kennen wir von der Simplex-Methode: Wir wandern von Knoten zu Knoten durch Austauschen von Basisvariablen. Entscheidend dabei ist die Auswahl des Pivotelements. Bei der Simplex-Methode geschieht dies so, dass ein Zielfunktionswert erhöht wird. In unserem Fall haben wir jedoch keine Zielfunktion, dafür aber eine weitere Bedingung, die wir im bisher vernachlässigt haben: die Komplementaritätsbedingungen aus (2.1). In unserem transformierten Polyeder werden diese Bedingungen impliziert durch

$$\mathbf{x}'^\top \mathbf{r} = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{y}'^\top \mathbf{s} = 0.$$

Um dies zu sehen, betrachten wir beispielhaft die erste Gleichung:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'^\top \mathbf{r} &= 0 \\ \Leftrightarrow \mathbf{x}' \cdot (\mathbf{1}_m - \mathbf{A}\mathbf{y}') &\stackrel{(2.3)}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \mathbf{x}' \cdot (\mathbf{1}_m u - \mathbf{A}\mathbf{y}) &\stackrel{(2.2)}{=} 0 \end{aligned}$$

Da $x_i > 0$ gdw. $x'_i > 0$, entspricht dies also genau den Komplementaritätsbedingungen aus (2.1).

Jede Nicht-Basisvariable hat den Wert 0 und entspricht einer Bedingung, die mit Gleichheit erfüllt ist. Eine Basis entspricht also in unserer geometrischen Interpretation einem Knoten, der alle Markierungen der Nicht-Basisvariablen hat. Ist x'_i nicht in der Basis enthalten, bedeutet dies $x_i = x'_i = 0$ und wir erhalten die Markierung i . Ist r_i nicht in der Basis enthalten, ist $r_i = 0$ und somit die Nebenbedingung für „ i ist beste Antwort“ ($(\mathbf{A}\mathbf{y}')_i = 1$ bzw. $(\mathbf{A}\mathbf{y})_i = u$) mit Gleichheit erfüllt, was ebenfalls die Markierung i liefert. Ein k -fast vollständig markierter Knoten entspricht also einer Basislösung, in der x_k und r_k oder y_k und s_k Basisvariablen sind. Außerdem gibt es zu dieser Basis ein Paar von komplementären Nicht-Basisvariablen. In einem Pivotschritt entfernen wir also eine der Variablen aus dem komplementären Basisvariablenpaar (d. h. wir nehmen eine neue Markierung auf) und nehmen eine der beiden komplementären Nicht-Basisvariablen in die Basis auf (d. h. wir entfernen eine doppelte Markierung). Dabei müssen wir wieder beachten, dass nicht eine Markierung entfernt wird, die im letzten Schritt aufgenommen wurde. Damit ist der Pivotschritt eindeutig.

Wir beginnen den Algorithmus mit einer Basis, die dem Knoten $(\mathbf{0}_m, \mathbf{0}_n)$ entspricht, also einer Basis, in der alle x_i und y_i Variablen Nichtbasisvariablen sind. Damit haben wir die geometrische Beschreibung des Algorithmus algebraisch umgesetzt.

Eine Behandlung des degenerierten Falls kann ähnlich wie bei der Simplex-Methode durch lexikographische Perturbierung erfolgen. Dies Behandeln wir jedoch an dieser Stelle nicht, da es sehr ähnlich ist.

Literaturverzeichnis

- [1] Daphne Koller, Nimrod Megiddo, and Bernhard von Stengel. Efficient computation of equilibria for extensive two-person games. *Games and Economic Behavior*, 14:247–259, 1996.
- [2] C. E. Lemke and J. T. Howson Jr. Equilibrium points in bimatrix games. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 12:413–423.
- [3] Bernhard von Stengel. *Handbook of Game theory*, volume 3, chapter Computing Equilibria for Two-Person Games. North-Holland, Amsterdam, 1999.